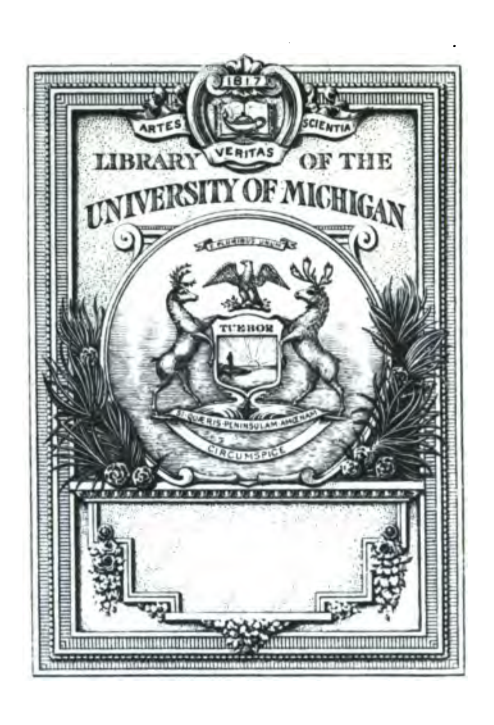

1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

Johann Gottlob Krügers,

Professors der Artzneygelahrheit auf der Königl. Preußl. Friedrichs-Universität,

Gedancken

von der

Algebra,

nebst den

Primzahlen

von

1 bis 1000000.

Halle im Magdeburgischen,
Zu finden in Lüderwalds Buchhandlung.
1746.

Denen
Reichs-Frey-Hoch-und Wohlgebohrnen Herren,

HERRN

Leopold Niclas

Frey-Herrn von Ende,

Erb-Lehn- und Gerichts-Herrn auf Alt-Jeßnitz, Trinum und Salza &c.

und

HERRN

August Friedrich

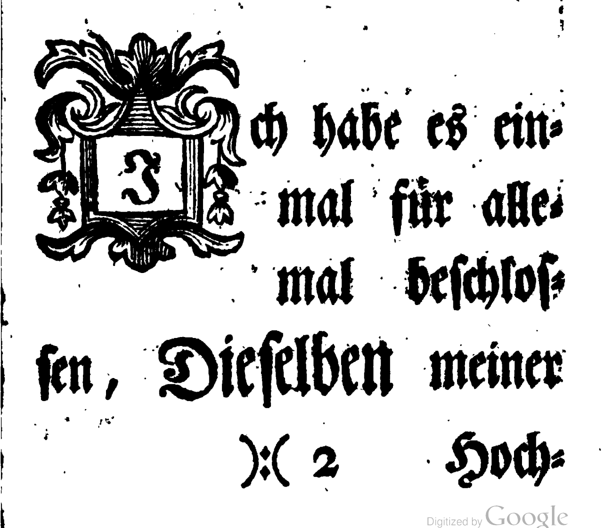
Frey-Herrn von Ende,

Erb-Herrn auf Alt-Jeßnitz, Trinum und Salza &c.

Meinen gnädigen Herren und grossen Gönnern.



Hoch- und Wohlgebohrne Freyherren, Gnädige Herren!



Ich habe es einmal für allemal beschlossen, Dieselben meiner

Hochachtung und Erge-
benheit zu versichern, und
ich weiß kein ander Mittel
dieses zu thun, als wenn
ich mir die Freyheit nehme,
Ihnen diese Frucht einer
Lebensart, zu welcher ich
bestimmt bin, gehorsamst
zuzueignen. Der Begriff,
welchen ich von Ihrer
Großmuth habe, läst mich
unmöglich vermuthen, daß

Sie

Sie solches ungnädig auf-
nehmen sollten, und wie
liesse sich auch wohl derglei-
chen von solchen Herren
befürchten, deren gründli-
che Einsicht in die Wissen-
schaften, tugendhafter
Wandel und gnädiges Be-
zeigen iedermann bewun-
dert, und mir dadurch das
Recht ertheilet, mit der

)(3 voll-

vollkommensten Hochach-
tung Lebenslang zu seyn

Hoch- und Wohlgebohrne
Freyherren,
Gnädige Herren,

Ew. Ew. Hoch- und
Wohlgebl.
Hoch- und Wohlgebl.

Halle
den 14 May
1746.

gehorsamst verbundenster
Diener,

Krüger.



Vorrede.

Ein Buch muß eine Vorrede haben. Hier ist sie. Ich hatte in meinen Anmerkungen über der Rechenkunst gesagt: man könnte die Algebra eben so leichte und begreiflich wie andere Wissenschaften vortragen; und ich übereilte mich so sehr, daß ich dieses zu thun versprach. Man ergriff mich bey meinem Wort, und ich ward sonderlich von auswärtigen Gelehrten erinnert, mein Versprechen zu erfüllen. Daher trieb mich die Furcht, kein Lügner zu werden, an, diese Blätter zu schreiben, welche zwar

keine

keine Algebra, aber doch ein Mittel in sich fassen, die Algebra auf eine leichtere Art zu lehren und zu erlernen. Ich zweifle nicht, daß man seinen Zweck erreichen werde, wenn man dieser Spur folgen will, daß ich ihr aber selber nicht weiter gefolget bin, daran ist Hippocrates schuld, welcher sagt: vita brevis ars longa. Durch die artem longam versteht er die Arzneygelahrtheit, und ich habe mir vorgesetzt, alle Theile derselben in einer systematischen Ordnung abzuhandeln.



Haller.



Haller.

O Meßkunst, Zaum der Phantasie,
Wer dir nur folget, irret nie.
Wer ohne dich will gehn, der gleitet.

§. 1.

Geber, ein Araber, hat die Ehre, daß von ihm eine Wissenschaft den Nahmen bekommen hat, für welcher die meisten Gelehrten beynahe wie für einem bösen Geiste ein Creutz zu machen pflegen. Die Ursache, warum sie so erschrecken, wenn die Algebra genennet wird, ist wol hauptsächlich diese, weil sie sich unüberwindliche Schwierigkeiten darinne vorstellen, und gleichwol nicht absehen können, was sie vor Nutzen davon haben. Ich will beyde Einwürfe beantworten, und man hat sich von mir eine desto unpartheylichere Beurtheilung zu versprechen, je weniger ich mir vorgesetzt habe, der Algebra eine Lobrede zu halten. Es ist dieses desto nöthiger, je gewisser es ist, daß wol keine Wissenschaft sey, welche von einigen Gelehrten so übermäßig erhoben, und von andern auf eine so unbillige Weise verworfen worden,

 als

als eben dieienige, von welcher wir handeln wollen. Ich werde mich bemühen, die Quellen dieser ausschweifenden Urtheile zu entdecken, und ich werde ihren Ursprung ohnfehlbar in den Neigungen des menschlichen Hertzens antreffen. Es ist nichts gewisser, als daß ein Mensch natürlicher Weise nichts höher liebe, als sich selbst; indem sogar die Pflichten gegen andere, die Verbindlichkeit gegen sich selbst zum voraus setzen, seinen eigenen Zustand vollkommener zu machen. Nun bleiben die Gelehrten allemal Menschen, sie mögen sich auch so sehr über die Menschlichlichkeit zu erheben suchen, als sie nur immer wollen. Wird man es ihnen also wohl verdencken können, wenn sie über ihre eigene Einsicht ein Vergnügen empfinden, dessen ein anderer nicht fähig ist. Dieses Vergnügen muß nothwendig desto grösser seyn, ie schwerer es uns geworden ist, die Vollkommenheit zu erhalten, aus welcher es seinen Ursprung genommen hat, und ie weniger andere Menschen diese Vollkommenheit besitzen. Wegen des letzten Umstandes richtet sich der Grad des Vergnügens nach der Grösse der Eitelkeit eines Menschen, eine Kranckheit, welche nach Art der Pocken, sehr wenig Leute verschonet. Wird man sich nun wundern, daß die meisten Algebraisten nicht Worte genug finden können, um ihre Wissenschaft bis an den Himmel

zu

zu erheben, da es ihnen bekannt ist, daß sie etwas wissen, wovon die allermeisten Menschen nicht nur nichts wissen; sondern auch kaum die Fähigkeit haben, etwas davon zu begreiffen. Dieses Vergnügen ist so groß, daß sie sich dadurch reichlich belohnt zu seyn vermeinen, wenn sie schon unendliche Mühe anwenden müssen, dasselbe zu erhalten.

Versenckt in tiefen Traum nachforschender Gedancken,
Schwingt ein erhabner Geist sich aus der Menschheit Schrancken.
Seht den verwirrten Blick, der stets abwesend ist,
Und itzt vielleicht den Raum von der Parabel mißt!
Sein stets gespannter Sinn verzehrt der Jahre Blüthe,
Schlaf, Ruh und Wollust fliehn sein himmlisches Gemüthe.

Der Anblick eines Algebraisten muß also wol eben nicht allzuangenehm seyn. Der gemeine Mann sieht ihn mit mitleidigen Augen an, und bildet sich ein, daß es in seinem Kopfe sehr betrübt aussehen müsse. Ja er hält ihn wol gar für wahnwitzig, wenn er vernimmt, daß der Endzweck aller seiner ängstlichen Sorgen und Bemühungen kein andrer sey, als zu finden:

Wie durch unendlicher verborgner Zahlen Reih',
Ein krummgeflochtner Zug gerecht zu messen sey.

Mit denen Gelehrten, welche selbst keine Mathematicker sind, hat es in diesem Stücke eben die Beschaffenheit, wie mit dem gemeinen Manne, ja es kan so gar bey ihnen die Verachtung gegen die Algebra noch grösser als bey jenen werden; weil bey ihnen noch der Verdruß hinzukommt, daß sie ihre Unwissenheit bekennen müssen, welches eine Art von Complimenten ist, die ein Gelehrter sehr ungern zu machen pfleget. Denn wenn einer alle göttliche und menschliche Dinge verstehet, wem nichts gefragt werden kan, mit dessen Beantwortung er nicht zum wenigsten eine gantze Stunde einen lauten und fortdaurenden Schall in der Luft hervorzubringen weiß, wenn er Worte gebrauchen kan, die viele andere und er selbst nicht verstehet, und man sölte bey dem allen bekennen, daß man ein paar Buchstaben nicht lesen könte, welche doch andere zu lesen wissen; das muß nothwendig gantz unerträglich seyn. Daher haben sie ein sehr bequemes Mittel gefunden, auf einmal aus der gantzen Sache zu kommen, und dieses bestehet darinne, daß sie die Algebra für eine Kleinigkeit ausgeben, an welche man, wegen andrer wichtiger Wahrheiten nicht ge-

dencken

dencken könte, daß sie sie für Grillenfängerey halten, und behaupten, daß sie in der Welt weiter keinen Nutzen hätte, als die Leute im Kopfe verrückt zu machen.

So wol die übermäßige Erhebung als ungebührende Verachtung der Algebra haben ihren Ursprung allzuweitgetriebenen Affecten zuzuschreiben, und Urtheile, welche aus dieser Quelle fliessen, werden vor dem Richterstuhle der Vernunft gar selten lauter befunden. Man kan also schon muthmassen, daß es auch hier vernünftig seyn werde, die Mittelstrasse zu halten. Um aber gewiß davon versichert zu seyn: so wollen wir uns bemühen, von denen Vollkommenheiten oder Unvollkommenheiten dieser Wissenschaft den gehörigen Werth zu bestimmen. Meine Bemühung würde vollkommen fruchtlos abgehen müssen, wenn ich nicht vorher von der Algebra einen deutlichen Begriff zu geben suchte. Denn ob es gleich unter den Gelehrten schon längstens Mode gewesen, von Sachen zu reden oder zu schreiben, ohne sich im geringsten darüber zu erklären: so muß man doch gestehen, daß die Mathematicker noch nicht vor gut befunden haben, diese Mode mit zu machen.

§. 2.

Die Algebra ist zwar eine Kunst, mathematische Wahrheiten zu erfinden, doch geschieht nicht eine iede Erfindung mathe-

matischer Wahrheiten vermittelst der Algebra. Nein, in denen älteren Zeiten sahe man sich genöthiget, einen Satz durch viele an einander hängende Vernunftschlüsse zu erfinden, welchen man ietzo durch algebraische Kunstgriffe viel leichter und so zu sagen spielend herausbringen kan. Dieses hat bey mir eine gewisse Hochachtung gegen die alten Mathematicker unserer Vorfahren hervorgebracht, welche macht, daß ich sie, wo nicht höher, doch eben so hoch als die neuern halten muß. Die Gleichheit ist leicht zu erweisen. Die heutigen Mathematicker wissen viel mehr als die alten; sie haben aber auch eine viel grössere Bequemlichkeit dieses zu lernen. Die Alten wusten weniger, es gehörte aber auch dazu viel mehr Mühe, dasienige wissen zu können. Wie angenehm ist mir es nicht, daß ich auch hier eine Probe von derienigen Gleichheit antreffe, von welcher ich mir einbilde, daß sie allenthalben in der Welt herrschet. Es behaupten einige Gelehrte, daß die Alten in Ansehung der Wissenschaft wie Kinder gegen uns wären; andere hingegen versichern, daß die neuern Gelehrten gegen die alten nicht anders als Kinder gegen erwachsene Personen betrachtet werden müsten. Denn gesetzt, sagen sie, daß die Einsicht der neuen Gelehrten grösser als der alten ihre ist. Was ist es Wunder? da ein Kind nothwendig wei-

weiter sehen muß als der Vater, wenn es auf seinen Schultern sitzt. Ich an meinem Theile sehe eben so wenig ab, warum man die heutigen Gelehrten kleiner, als warum man sie grösser machen wolle als die alten. Nein, ie mehr ich es überlege, ie mehr finde ich, daß neue und alte Gelehrte von einerley Grösse sind; doch sehen die neuern weiter, weil sie von den alten getragen werden, und sie müsten in Wahrheit sehr undanckbar seyn; wenn sie ihnen nicht dafür verbunden seyn wollten. Zum wenigsten hat dieses in Ansehung der Mathematick seine vollkommene Richtigkeit. Denn man bedencke nur, wie schwer es gewesen seyn müsse, mathematische Wahrheiten durch lauter Vernunftschlüsse zu erfinden, wie man heut zu Tage in der Weltweisheit zu thun pfleget. Denn man darf eben nicht dencken, daß es so leicht gewesen sey, einen mathematischen Satz durch einen Schluß herauszubringen, als es uns ist, einen auf diese Art abgefassten Beweiß zu begreiffen. Und wem diese Art, philosophische Wahrheiten zu erfinden, so leichte ankömmt, der nehme sich in acht, daß seine erfundene Sätze entweder nicht solche Kleinigkeiten betreffen, welche man ohne dem schon längstens gewust hat, oder die er durch falsche Schlüsse hervorgebracht. Keines von beyden last sich von denen mathematischen Sätzen der Alten

vermuthen, sie sind vorher nicht bekannt gewesen, und daß irrige Vernunftschlüsse dabey gemacht worden, untersteht sich niemand zu behaupten. Es entsteht daher billig die Frage, was das vor Kunstgriffe sind, deren sich die Mathematicker heut zu Tage bedienen, um Wahrheiten zu erfinden, ohne solche weder durch Erfahrung noch mühsame Vernunftschlüsse herauszubringen. Aber eben dieses ist dieienige Frage, welche viel leichter gethan als beantwortet werden kan, das macht, die Algebra findet ihre eigene Kunstgriffe zu erfinden selbst, und ist also einer Spinne ähnlich, welche ihr zwar zartes aber Regelmäßiges Gewebe aus ihr selber hervorgebracht.

Mit Recht vergleicht die muntere Corinne
Den Mathematicker mit einer Spinne.
Er ziehet Linien, sie auch.
Sie machen Circkel alle beyde,
Der Unterschied ist blos allein,
Daß ihre Linien und Circkel in dem Bauch
Die seinigen im Kopf formiret seyn.

Daher läst sich dergleichen freylich nicht besser sehen, als wenn man die Algebra selber erlernet; indessen wollen wir doch hier so viel, als sich überhaupt davon sagen läst, betrachten.

§. 3.

§. 3.

Der Satz, daß aus nichts nichts werde; ist einer von denenienigen, darüber sich das gantze menschliche Geschlecht verglichen hat, und die **Mathematicker** sind viel zu vernünftig, als daß sie ihn in Zweifel ziehen sollten. Daher erfordert nicht nur der Rechenmeister, daß allemal gewisse Zahlen gegeben seyn müssen, wenn man rechnen, das ist, andere vorher unbekannte Zahlen finden soll, sondern der Algebraiste macht es eben so, ob sich gleich seine Erfindungskunst nicht wie ienes seine bloß auf die Zahlen einschrencket; sondern vielmehr auf alle Arten der Grössen erstreckt. Man trift also bey den algebraischen Aufgaben bekannte und unbekannte Grössen an. Da es nun vernünftig ist, Sachen von verschiedener Art mit verschiedenen Namen zu benennen: so hat es denen Algebraisten beliebt, die bekannten Grössen durch die ersten und die unbekannten durch die letzten Buchstaben des Alphabets anzudeuten. Wenn ich z. E. aus der Summe zweyer Zahlen nnd ihrer Differentz die Zahlen selber finden soll, so würde ich die Summe a, die Differentz b, und die beyden unbekannten Zahlen, so ich wissen wollte, x und y, nennen. Solchergestalt wissen die Mathematicker allemal, was sie erfinden wollen, und woraus sie es erfinden wollen, dahingegen andere Gelehrten öfters selbst nicht

nicht wissen, was sie wollen. Sie haben eine sehr grosse Begierde, neue Wahrheiten zu entdecken, aber sie wissen nicht, woraus sie sie entdecken sollen, welches mir eben so vorkömmt, als wenn man das Dach eines Hauses verfertigen wollte, ehe das Haus gebauet worden wäre. Können wir also nicht hieraus eine Regel der Vernunftlehre herleiten, welche darinnen bestehet, daß man iederzeit, wenn man etwas erfinden will, wohl überlege, was man eigentlich zu wissen verlangt, und daß man allemal einige bereits bekannte Wahrheiten haben müsse, daraus sich dergleichen herleiten liesse.

§. 4.

Ich habe ein Exempel von a b x y gegeben, und ich weiß gewiß, daß diese armseligen Buchstaben vermögend genug sind, einige Leser dergestalt zu erschrecken, daß sie die übrigen Blätter nicht zu lesen verlangen werden. Weil ich aber zu allem Glücke ein Artzt bin, so will ich versuchen, ob ich so etwas zubereiten kan, welches macht, daß ihnen dieses Schrecken nichts schadet. Ich bin desto mehr dazu verbunden, da meine Absicht ist, in diesen Blättern zu zeigen, daß die Algebra gar wohl auf eine leichtere Art vorgetragen werden könte, als es bisher von den Gelehrten geschehen. Ich hatte

dieses

dieses in den Anmerckungen, welche ich über die Rechenkunst des Herrn Baron und Canzlers von Wolffens geschrieben habe, behauptet, und bin verschiedentlich von auswärtigen Gelehrten an die Erfüllung meines Versprechens vielfältig erinnert worden. Mein Vorsatz ist, dieses gegenwärtig zu thun, nicht aber eine vollständige Algebra zu verfertigen, worzu sehr viel Zeit und Mühe erfordert würde. Nein, ich will nur meine Gedancken eröffnen, wie ich wol glaubte, daß es möglich wäre, den Anfängern die Algebra leichter zu machen, und dieses durch ein paar Exempel erläutern. Vielleicht hat dieses den Nutzen, daß andere Gelehrte, welche mehr Zeit und Geschicklichkeit besitzen, den rühmlichen Endschluß fassen: den Vorhang vor der Algebra hinwegzuziehen, welcher sie so fürchterlich macht. Geschähe dieses, so würden ihre Annehmlichkeiten mehr in die Augen fallen, und sie würde, ihres arabischen Namens ohngeachtet, auch von denenjenigen verehret werden, die dieses sonst nicht gethan haben würden, weil es ihnen entweder an der Fähigkeit, Sachen zu begreiffen, oder an der Gedult darzu fehlet. Kranckheiten, welche sehr gemein sind, dafür aber kein sichereres Mittel, als die Erlernung der Algebra vorgeschlagen werden kan.

§. 5.

§. 5.

In der Rechenkunst sind allemal gewisse Zahlen gegeben, aus welchen andere gefunden werden. Wir finden also in der Rechenkunst eine besondere Wahrheit, aber in der Algebra soll ein allgemeiner Satz gefunden werden: Ein Satz, der sich auf einige Zahlen von einer gewissen Art oder auf alle Grössen von einer gewissen Art erstreckt. Z. E. wenn ich sage: die Summe zweyer Zahlen ist 14, ihr Unterschied, das ist, die Zahl, welche herauskömmt, wenn man die kleinere von der grösseren abziehet, ist 2, es fragt sich: was dieses vor Zahlen sind, welche zusammen addiret 14, und von einander abgezogen, 2 ausmachen? Man antwortet: Diese beyden Zahlen sind 6 und 8, so ist dieses eine arithmetische Frage und arithmetische Auflösung derselben. Hingegen wenn man gefragt hätte: Wie soll man aus der Summe zweyer Zahlen und ihrem Unterschied die Zahlen selber finden? Und man antwortet darauf: es müsse die halbe Differentz zu der halben Summe addiret werden, wenn die gröste von den beyden Zahlen herauskommen solle; so ist dieses eine algebraische Aufgabe und Auflösung. Jedermann siehet, daß hier die Summe der beyden Zahlen eben nicht 14 und ihre Differentz 2 seyn müsse, sondern daß auch eine andere Summe und eine andere Differentz

ange-

angenommen werden könne, das ist: daß der Ausdruck allgemein sey. Da man nun bey so gestallten Sachen keinen Grund hat, eine Zahl für der andern zu erwählen: so siehet man sich genöthiget, einen Ausdruck zu gebrauchen, welcher gantz allgemein ist, und worunter man sich alle mögliche Summen vorstellen kan. Hierzu sind die Buchstaben vollkommen bequem, und ich kan mir z. E. bey dem Buchstaben a einbilden, daß er die Summe zweyer Zahlen vorstellt, es mögen diese Zahlen groß oder klein seyn. Hat man also nicht Ursache genug gehabt, die Buchstaben als allgemeine Zeichen der Grössen zu erwählen, und können sie einem wol so fürchterlich vorkommen, wenn man es recht bedenckt, was sie zu bedeuten haben. Denn ein Exempel mit Zahlen ist allemal ein besonderer Fall, von dem man vermöge der Regeln der Vernunftlehre auf einen allgemeinen Satz keinen Schluß machen kan. Die Rechnungen mit Zahlen vergleichen sich denen Experimenten in der Naturlehre. Diese geben uns eine wahrscheinliche Muthmassung auf einen allgemeinen Satz, und diese Wahrscheinlichkeit wird desto grösser, ie öfter das Experiment angestellt wird, dergestalt, daß bey einer sehr öftern Wiederholung der allgemeine Satz beynahe völlig gewiß wird. Werden aber nicht viele Proben angestellt, so können

nen

nen wir doch bisweilen in Irrthum verlei-
tet werden. Denn setzet, man fragte ie-
manden, um wie viel die Hälfte, das Drit-
tel und Viertel einer Zahl grösser sey, als die
Zahl selbst? Er wollte es mit einer Zahl ver-
suchen, und fiele gerade auf die Zahl 24, de-
ren Hälfte 12, das Drittel 8 und das Viertel
6 ist, welches zusammen 26 und also um 2
mehr als die Zahl 24 ausmacht, so würde er
daraus den Schluß machen, daß die Hälfte,
das Drittel und Viertel einer ieden Zahl
um 2 grösser sey, als die Zahl selbst, welches
doch falsch ist. Die Algebra hingegen zeigt:
daß dieses bey der Zahl 24 gantz allein ein-
treffe.

§. 6.

Gleichwie nun hieraus erhellet, daß die
Mathematicker Grund haben, sich in der
Algebra der Buchstaben zu bedienen, in-
dem ein eintziges a geschickt ist, ihnen den
Gedancken von tausend ia unendlichen Zah-
len, die in einer gewissen Absicht von einer-
ley Beschaffenheit sind, beyzubringen, so
kan auch dergleichen Ausdruck bisweilen
ausser der Mathematick, wenn von allge-
meinen Sätzen die Rede ist, gebraucht wer-
den. Dieses gehet hauptsächlich in der On-
tologie an. Aber man muß sich in acht
nehmen, daß man es da nicht gebraucht,
wo der Ausdruck mit Worten deutlicher als
der mit Buchstaben ist. Denn einige bil-
den

den sich ein, daß es noch einmal so gelehrt lasse, wenn man so viel möglich alle Erklärungen und Beweise mit einem A B C D auszieret, welches ich doch niemals billigen kan, wenn dadurch sonst klare Sachen dunckel gemacht werden. Denn man wird sich sehr irren, wenn man sich einbilden wollte, es erhielte ein philosophischer Beweiß dadurch eine viel grössere Gewißheit, und sey den mathematischen Wahrheiten gleich zu schätzen, weil er mit vielen A B C D auszieret ist. Nein, dergleichen Beweise gleichen einer krancken Person, welche nichts desto weniger kranck verbleibet, ob sie schon ihr Gesichte mit einem Flore verhüllet hat, welcher macht, daß es schwerer fällt, ihre blasse Gesichtsbildung zu entdecken. Mit den Buchstaben in der Algebra hat es eine gantz andere Beschaffenheit; sie machen uns unsere Vorstellungen leichter, als sie gewesen seyn würden, wenn wir sie mit Worten ausgedrückt hätten, und setzen uns daher in den Stand, neue Wahrheiten zu erfinden. Denn, lasset uns nur gestehen, daß unser Verstand zu schwach sey, sich viele Sachen auf einmal vorzustellen, und daß dieses desto weniger angehe, wenn wir kein Bild in der Einbildungskraft haben. Die Buchstaben in der Algebra heben beyde Schwierigkeiten, sie geben der Einbildungskraft ein Bild, indem wir mit unsern Au-

gen den allerkürtzesten Ausdruck unserer Gedancken auf dem Papiere erblicken, und sie überheben uns der Mühe, viele Sachen auf einmal zu gedencken, weil wir immer nur nöthig haben, uns den letzten Ausdruck oder nebst demselben einen noch vorhergegangenen vorzustellen.

§. 7.

Sind die Buchstaben und Zeichen der Algebraisten von einem so grossen Nutzen, warum bedienet man sich nicht entweder derselbigen, oder anderer ausser der Mathematick? Man sieht eben nicht ab, daß dieses unmöglich sey, aber man sieht auch nicht, wie es zu Stande zu bringen wäre. Daher hat der Herr von Leibnitz eine allgemeine Zeichenkunst zwar gewünscht, aber nicht gegeben, und wir möchten dergleichen wol nicht so bald zu sehen bekommen, da es in der That keine leichte Sache ist, so schön es auch wäre, wenn man dergleichen hätte. Denn man bilde sich ein, daß ein Artzt zu den Patienten käme, er fragte ihn um alle Umstände seiner Kranckheit, welche zu wissen nöthig wären, hierauf nähme er einen Bogen Papier, setzte ein a b x y darauf, und brächte durch einiges Nachdencken endlich die Artzney heraus, welche die Kranckheit so gewiß heben müste, als 2 mal 2 4 ist. Dieses würde ein Artzt seyn, von welchem man sagen könte, daß er denen Algebraisten

sten

sen ähnlich wäre. Ich glaube nicht, daß man es iemals dahin bringen werde, denn man müste in der Artzneygelahrheit eben die Gewißheit und Deutlichkeit der Begriffe wie in der Mathematick haben, wenn dieses angehen sollte; und dieses ist uns Menschen bey Begriffen von eintzelnen Dingen, dabey unzählig viel Merckmahle sind; nicht möglich. Am allerersten müste es sich mit der Ontologie thun lassen, darinnen die Begriffe sehr allgemein sind, und folglich aus wenig Merckmahlen bestehen. Ich habe es einmal versucht, aber nicht zu Stande gebracht. Dem ohngeachtet hat mir meine Mühe nicht gereuet, weil sie mir darzu gedienet hat, daß ich die Quellen dieser Schwierigkeiten habe entdecken und zugleich finden können, warum vieles in der Ontologie vielmehr so, als anders ist.

§. 8.

Man darf nicht dencken, daß es ausser der Algebra keine andere Zeichen der Gedancken als Worte gebe. Nein, man hat derselben eine sehr grosse Anzahl; nur das ist schlimm, daß sie nicht so wie in der Algebra zum Erfinden gebraucht werden können, sondern sie dienen nur, entweder unsere Gedancken zu verstecken, oder sie kurtz auszudrucken, oder aber der Einbildungskraft besser als mit Worten zu statten zu kommen. Zu der erstern Art gehören die

geheimen Schriften, welche mit willkühr-lichen Zeichen geschrieben sind, die aber dem ohngeachtet durch einige Regeln, die sonderlich die Endungen der meisten Wörter einer Sprache betreffen, und durch angewendeten Fleiß entdecket werden können. Hieher gehören auch die Ausdrücke der Chymisten und sonderlich der Goldmacher, die man in ihren Schriften antrift, da sie z. E. durch einen Triangel das Feuer, durch einen Todtenkopf dasienige, was bey einer chymischen Operation zurücke bleibet, und durch einen im Sarge liegenden Körper die Fäulniß einer Materie verstehen, die Sonne bedeutet bey ihnen das Gold und der Mond das Silber, wovon man die chymischen Schriften des Basilii Valentini nachlesen kan, darinnen sich das gantze Geheimniß, Gold zu machen, in Kupfer gestochen befindet. Es wäre der Mühe werth, sich um die Erklärung aller dieser Figuren zu bekümmern, wenn man zwey Sachen gewiß wüste, davon die erste diese ist: ob der Basilius Valentinus habe Gold machen können? und die andere, ob alles darzu gehörige in seinem Buche anzutreffen wäre.

§. 9.

Unter die Zeichen, deren man sich bedienet, um seine Gedancken kurtz auszudrucken, gehören die Abbreviaturen, darinnen man sonderlich in Engelland und China sehr geschickt

geschickt ist. Die Astronomischen Zeichen, welche wir im Calender antreffen, sind eben von dieser Art, und man könte noch die medicinischen darzu setzen, welche in den Recepten gebraucht werden. Mit dergleichen Zeichen ist es eben so beschaffen, wie mit den verschiedenen Arten zu zählen. Man muß viel im Kopfe behalten, wenn man sich kurtz, und wenig, wenn man sich weitläufftig ausdrückt, daher dienen sie fast zu nichts anders, als Raum oder Zeit zu ersparen, und wenn man keines von beyden nöthig hat, so ist es allemal besser, ein Paar Worte mehr zu setzen, und dem Leser in einer Minute begreiflich zu machen, was er sonst kaum in einer Stunde errathen haben würde.

§. 10.

Die dritte Art derer Zeichen, welche ausser der Mathematick üblich ist, ist diejenige, da man denen Empfindungen und der Einbildungskraft auf eine vortheilhafte Art zu Hülfe zu kommen sucht, und diese haben vor denen vorigen einen mercklichen Vorzug. Dahin gehöret die Abzeichnung derer Täntze, uud die Noten in der Music, nebst denen Zeichen des Generalbasses. Denn bey den Noten zu bleiben, so wird man im Generalbaß entweder durch Erblickung einer eintzigen Note, oder ein bis zwey Ziffern in den Stand gesetzt, den Schall

von vier Tonen augenblicklich hervorzubringen und zugleich die Dauer derselben zu bestimmen, welches in der That was vortreffliches ist, und meines Erachtens haben wir ausser der Algebra nirgends schönere Proben der Zeichenkunst, als in der Music und insonderheit bey dem Generalbasse.

§. 11.

Nachdem wir gesehen haben, was die Buchstaben in der Algebra zu bedeuten haben, so werden wir betrachten müssen, was vor Veränderungen sich mit ihnen vornehmen lassen. Es kan ohnmöglich schwer fallen, dieses auszumachen, wenn wir bedencken, daß die Buchstaben nichts anders als Grössen, oder welches eben so viel ist, undeterminirte Zahlen sind. Nun lassen sich mit den Zahlen nicht mehr als viererley Veränderungen vornehmen (§. 49. **der Anmerckungen über die Rechenkunst**) und daraus sind die vier Rechnungsarten, das **Addiren, Subtrahiren, Multipliciren** und **Dividiren** entstanden; derowegen können auch mit den Buchstaben in der Algebra nicht mehr als vier Veränderungen vorgenommen werden, welche entweder vermöge der **Addition** oder **Subtraction** oder **Multiplication** oder **Division** geschehen müssen. So leicht und so wenig zusammengesetzt sind die ersten Anfangsgründe einer

ner Wissenschaft, welche doch nach iedermanns Meinung die allerschwereste ist.

§. 12.

Weil sich alles in der Algebra auf die vier Rechnungsarten gründet, und ich mir hier vorgesetzt habe zu zeigen, wie die Algebra auf eine leichte und begreifliche Art und Weise vorgetragen werden könne, so werde ich nothwendig mit der Buchstabenrechnung den Anfang machen müssen. Ehe aber dieses geschehen kan, so ist vorher zu mercken, daß alle Grössen, welche durch die Buchstaben angedeutet werden, von einer doppelten Art sind. Es sind entweder würckliche Grössen oder verneinende Grössen (quantitates positivæ vel negativæ.). Was würckliche Grössen sind, ist iedermann bekannt, und man kan davon meine Anmerckungen über die Rechenkunst nachsehen, worauf ich mich nebst der teutschen Arithmetick und Geometrie des Herrn Cantzler von Wolfens überhaupt beziehe, und zum voraus setze, daß dieses einem ieden bekannt seyn müsse, indem diese Sachen bey denen, welche die Algebra zu erlernen gedencken, nothwendig zum Grunde gelegt werden müssen. Denn ohngeachtet sehr viele Sätze der Arithmetick und Geometrie, die sonst unter die ersten Grundwahrheiten gehören, vermittelst der Algebra können gefunden werden, so hat man sich doch dabey sehr in

acht zu nehmen, daß kein Circul im Beweisen begangen wird. Daher thut man besser, daß man die so genannte Mathesin puram erst recht zu begreiffen sucht, ehe man sich an die algebraischen Heiligthümer waget. Denn es ist der Natur unserer Seele gemäß, von den leichten zu den schwerererern, und von besondern zu allgemeinen Begriffen in die Höhe zu steigen. Insonderheit sind diejenigen Aufgaben in der Rechenkunst, welche von den Brüchen handeln, in der Algebra von einem sehr grossen Nutzen, und viele finden deswegen unüberwindliche Schwierigkeiten, weil sie entweder in den Bruchrechnungen nicht erfahren sind, oder nicht wissen, wie sie in der Algebra wieder angebracht werden müssen.

§. 13.

Weil ich nicht nöthig habe, von den Grössen überhaupt, oder auch von derjenigen Art derselben, welche ich eine würckliche Grösse (quantitatem positivam) genennet habe, eine weitläufftige Beschreibung zu geben: so werde ich nur suchen, die verneinende Grösse (quantitatem negativam) begreiflich zu machen. Eine verneinende Grösse ist eine solche, die weniger als nichts ist, und besitzt eben so wie die würckliche das Hauptkennzeichen einer Grösse, welches darinnen bestehet, daß sie vermehret und vermindert werden kan. Man stelle sich einen Menschen

schen vor, welcher tausend Thaler besitzt, und 3000 Thaler schuldig ist. Ich frage, wie viel er im Vermögen habe? Man wird sagen: Er hat nichts. Aber dieses ist falsch. Denn wenn er tausend Thaler hätte, und tausend schuldig wäre, so hätte er nichts. Wenn er aber 1000 Thaler besitzt, und 3000 Thaler schuldig ist; so hat er 2000 Thaler weniger als nichts. Und dieses ist eine verneinende Grösse. Hätte er 1000 Thaler, und wäre 5000 schuldig: so hätte er 4000 Thaler weniger als nichts. Und also sieht man, daß sich die verneinenden Grössen eben so wie die würcklichen, vermehren und vermindern lassen. Das Zeichen der verneinenden Grössen ist —, das Zeichen der würcklichen aber +. Wo gar kein Zeichen stehet, wird allemal eine würckliche Grösse verstanden.

§. 14.

Nun können wir urtheilen, wie man Buchstaben zusammen *addiren* müsse. Denn da alle Grössen entweder würckliche oder verneinende Grössen sind: so entspringen daraus die folgenden drey möglichen Fälle. Entweder wir addiren eine würckliche Grösse zu einer würcklichen, oder eine verneinende zu einer verneinenden, oder endlich eine würckliche zu einer verneinenden. Wir wollen alle drey Fälle untersuchen.

I. Wenn eine würckliche Grösse zu einer würcklichen addiret wird, so geschieht es wie in der Rechenkunst, wo wir ebenfalls lauter würckliche Grössen zu addiren pflegen.

1) Z. E. Man addire $3a + 5b$
zu $4a + 3b$

so ist die Summe $7a + 8b$

2) Man addire $6a + 4b + c + 2x$
zu $4a + b + c + 4y$

so ist die Summe $10a + 5b + 2c + 2x + 4y$

II. Eben so ist es mit den verneinenden Grössen beschaffen: man addiret sie gleichfalls wie in der Rechenkunst gebräuchlich ist, und dieses ist eben so wenig zu verwundern, als daß 200 Rthl. Schulden und 300 Rthl. Schulden zusammen 500 Rthl. Schulden ausmachen.

1) Z. E. Man addire $-3a - 5b$
zu $-4a - 3b$

so ist die Summe $-7a - 8b$

2) Man addire $-6a - 4b - c - 2x$
zu $-4a - b - c - 4y$

so ist die Summe $-10a - 5b - 2c - 2x - 4y$

III. Der

III. Der dritte Fall, wenn man verneinende und würckliche Grössen zusammen addiren soll, oder welches gleich viel ist, wenn die Zeichen der Buchstaben verschieden sind, erfordert, daß man von der grössern Zahl die kleinere abziehe, und zu dem, was übrig bleibet, das Zeichen der grössern setze.

1) Z. E. Man addire $-2a+5b$
zu $+3a-4b$

so ist die Summe $+a+b$

Denn wenn 2a fehlen, und 3a sind würcklich vorhanden, so wird dadurch der Fehler nicht nur aufgehoben, sondern es bleibt auch noch ein würckliches a übrig, und eben so klar ist es, daß ein b übrig bleiben müsse, wenn 5b vorhanden sind, und 4b mangeln.

2) Man addire $-6a+b+4c+5d$
zu $+2a-4b-4c-2y$

so ist die Summe $-4a-3b+5d-2y$

Denn wenn 2a würcklich vorhanden sind, und 6a fehlen, so fehlen nunmehr nur noch 4a, das ist nach der algebraischen Sprache so viel als $-4a$. Wenn ein b vorhanden ist, und kömmt ein Mangel von

von 4b dazu, so ist der Mangel nunmehro nur noch 3b oder man bekömmt — 3b. Wenn 4c fehlen und 4c sind vorhanden, so fehlt eben so viel, als da ist, man behält also nichts, und da man nichts davon hat, wenn man nichts schreibt: so läst man die Summe von + 4c und — 4c gar weg. Da zu + 5d und zu — 2y nichts zu addiren ist, so bleiben sie, was sie waren, nemlich + 5d und — 2y.

Hieraus kan man alle zusammengesetzte Fälle beurtheilen. Folgendes Exempel kan zur Uebung dienen.

$$\begin{array}{l} a + 2b - 3c - 5d \\ 3a - 2b + 6c + 2d \\ \hline 4a + 3c - 3d \end{array}$$

§. 15.

Ich werde künftig um der Kürtze willen an statt der würcklichen Grössen allemal das Zeichen +, und an statt der verneinenden das Zeichen — setzen. Wenn man Grössen von einander subtrahiret: so subtrahiret man entweder + von + oder — von — oder + von — oder — von +, und da die Zahl, welche man abziehet, derjenigen, von welcher man sie abziehet, entweder

der gleich oder ungleich ist; und wenn sie ihr ungleich ist, entweder grösser oder kleiner ist: so entstehen überhaupt 12 mögliche Fälle.

I. Wenn die Grössen, so man von einander subtrahiret, gleich sind.

II. Wenn die abzuziehende Zahl kleiner ist als diejenige, davon die Subtraction geschehen soll.

III. Wenn die abzuziehende Zahl grösser ist als diejenige, davon man sie abziehen soll: so können in jedem von diesen Fällen die gedachten vier möglichen Verbindungen der Zeichen vorkommen, welches überhaupt 12 mögliche Fälle ausmacht. Welche wir untersuchen wollen.

I. Wenn einerley Zeichen sind, und man soll das kleinere von dem grössern abziehen, so verrichtet man die Subtraction wie mit den Ziffern.

Z. E. 1) von $16a + 4b + 8d + e + 3f + 5g$
soll subtr. werden $4a + 3b + 5d + e + 3f + 4x$

so ist der Rest $12a + b + 3d + 5g - 4x$

Daß 4a abgezogen von 16a, 3b von 4b und 5d von 8d subtrahirt, übrig lassen $12a + b + 3d$, hat gar keine Schwierigkeit. Wenn man e von e und

und 3f von 3f abzieht, so kan nichts übrig bleiben, weil man eben so viel hinwegnimmt, als vorhanden war. Von 5g war nichts zu subtrahiren, derowegen bleiben sie 5g, und 4x sollten von nichts subtrahirt werden, also bleiben auch diese 4x.

$$
\begin{array}{rl}
2) & -16a-4b-8d-e-3f-5g \\
 & -\quad 4a-3b-5d-e-3f-4x \\
\hline
\text{Rest} & -12a-\ b-3d-5g+4x
\end{array}
$$

Um dieses zu verstehen, ist zu mercken, daß eine verneinende Grösse subtrahiren, eben so viel sey, als etwas würckliches setzen. Denn bildet euch ein: ich wäre 100 Rthl. schuldig, und ihr wolltet mir diese Schuld hinwegnehmen, würdet ihr mir nicht 100 Rthl. geben müssen? Und kan uns wol eine Sache befremden, die sich auf eine bekannte Regel der Grammatick gründet. Denn wer weiß nicht, daß zwey Verneinungen beiahen. Wenn ich aber eine verneinende Grösse hinwegnehmen will, so leugne ich ja in der That die Abwesenheit einer Grösse. Heist dieses aber wol etwas anders, als daß ich behaupte, es sey eine würckliche Grösse vorhanden. Hieraus erhellet also, daß —4a abziehen eben so viel

viel heisse; als 4a setzen. Wenn mir nun 16a fehlen, und es werden mir 4 gegeben, so fehlen mir nunmehro nur noch 12a. Wer sieht also nicht, daß — 12a übrig bleiben müsse, wenn — 4a von — 16a abgezogen wird. Wenn — e von — e subtrahiret werden soll: so soll ich den Mangel von einem e hinweg nehmen, das heist; ich soll ein e setzen, da mir nun gerade ein e fehlt, so ist klar, daß nichts übrig bleiben könne. Und eben so ist es beschaffen, wenn — 3f von — 3f abgezogen werden soll. Von — 5g ist nichts abzuziehen, daher bleibt es unverändert — 5g. Hingegen — 4x soll ich von nichts abziehen. Da nun ein — abziehen eben so viel ist, als etwas setzen, so werden 4 würckliche x zu nichts gesetzt, und man begreift also, warum hier die — 4x in + 4x verwandelt worden sind.

II. Wenn einerley Zeichen sind, und man soll das grössere von dem kleineren subtrahiren, so ziehet man das kleinere von dem grösseren ab, und setzet zu dem was übrig bleibet, das Zeichen — wenn die Grössen +, und + wenn sie — haben.

Z. E. 1) $4a + 3b + 5d + e + 3f + 4x$
$16a + 4b + 8d + e + 3f + 5g$

Rest $- 12a - b - 3d - 5g + 4x$

Denn wenn 4a vorhanden sind, und ich soll 16a davon wegnehmen, so gebe ich die vorhandenen 4a, und alsdenn fehlen noch 12a, welche ebenfalls weggenommen werden sollen. Die Grössen aber, welche fehlen, sind verneinende Grössen, und bekommen also das Zeichen —. Wenn ein e vorhanden ist, und ich soll ein e davon wegnehmen, so kan nichts übrig bleiben, eben so ist es, wenn ich 3f von 3f abziehen soll. Von + 4x soll nichts hinweggenommen werden, daher bleiben sie unverändert + 4x. Hingegen wenn ich + 5g von nichts hinwegnehmen soll, so bekomme ich 5g weniger als nichts, das ist, mathematisch von der Sache zu sprechen, — 5g.

2) $- 4a - 3b - 5d - e - 3f - 4x$
$- 16a - 4b - 8d - e - 3f - 5g$

Rest $+ 12a + b + 3d + 5g - 4x$

— 16a subtrahiren, heist so viel, als 16a würcklich setzen. Denn was ist es anders, wenn ich den Mangel hinwegnehme, als daß ich denselben

durch

durch eine würckliche Grösse ersetze. Wenn mir nun 4a fehlen, und ich nehme den Mangel von 16a hinweg, so müssen mir nothwendig 12 würckliche a übrig bleiben. Derowegen läst —16a, wenn es von —4a abgezogen wird, + 12a übrig. Wenn ich —e von —e subtrahiren soll, so soll ich den Mangel von einem e wegnehmen, da mir nun gerade ein e fehlet, so kan nichts übrig bleiben. —5g soll ich von nichts wegnehmen, da nun wiederum ein — hinwegnehmen nichts anders ist, als etwas würckliches setzen, so werden die —5g, welche abgezogen werden sollten, in + 5g verwandelt. Weil endlich von —4x nichts abzuziehen ist, so bleiben sie unverändert —4x.

III. Wenn die Zeichen verschieden sind, so addiret die Grössen, die ihr von einander abziehen sollet, und zu der Summe setzet das Zeichen derienigen Grösse, von welcher die Subtraction geschehen sollte.

Z. E. $+16a+4b+8d+e+3f+5g$
$\quad\quad -4a-3b-5d-e-3f-4x$

Rest $+20a+7b+13d+2e+6f+5g+4x$

16a sind vorhanden, der Mangel von 4a wird noch dazu hinweggenom-

 men,

men, derowegen kommen zu den vorhandenen 16a noch 4a hinzu, und diese machen zusammen 20a aus. So ist es auch mit den übrigen, als wenn ein — e hinweggenommen werden soll, und es ist schon ein + e da: so muß dieses zusammen + 2e ausmachen. Von + 5g soll nichts abgezogen werden, daher bleibt es + 5g, und da von nichts — 4x abgezogen werden sollen, so werden sie in + 4x verwandelt.

$$2)\quad \begin{array}{l} -16a-4b-8d-e-3f-5g \\ +4a+3b+5d+e+3f+4x \\ \hline \text{Rest} -20a-7b-13d-2e-6f-5g-4x \end{array}$$

16a fehlen, 4a sollen noch hinweggenommen werden. Folglich fehlen 20a oder man bekömmt —20a u. s. w. Von — 5g ist nichts zu subtrahiren, und also bleibt es, da hingegen + 4x, wenn sie von nichts subtrahiret werden, 4x weniger als nichts, das ist —4x ausmachen.

$$3)\quad \begin{array}{l} +4a+3b+5d+e+3f+4x \\ -16a-4b-8d-e-3f-5g \\ \hline \text{Rest} +20a+7b+13d+2e+6f+5g+4x \end{array}$$

Denn 4a sind vorhanden, und da der Mangel von 16a noch hinweggenommen werden soll: so werden zu

diesen

diesen 4a noch 16a hinzugesetzt, welches zusammen 20a ausmacht, u. s. w. — 5g sollen von nichts abgezogen werden, das ist, man soll zu nichts noch 5g hinzusetzen, welches + 5g ausmacht, und da von + 4x nichts subtrahirt werden soll, so bleibt es unverändert.

4) $-4a - 3b - 5d - e - 3f - 4x$

$+16a + 4b + 8d + e + 3f + 5g$

Rest $-20a - 7b - 13d - 2e - 6f - 5g - 4x$

4a fehlen und 16a sollen noch hinweggenommen werden, werden also nicht 20a fehlen müssen? Das übrige läst sich aus den vorhergehenden abnehmen.

Dieses sind alle mögliche Fälle. Folgendes Exempel kan zur Uebung dienen.

$9b + 15c - 7d + 8e - f$

$6b + 20c - 9d - 9e + 7f$

$3b - 5c + 2d + 17e$ [illegible] $8f$ (—)

§. 14.

Bey der Multiplication kommen drey Fälle vor. Man multiplicirt entweder + mit +, oder — mit —, oder endlich + mit —. Im übrigen verrichtet man die Multipli-

tiplication wie in Zahlen, nur ist zu mercken, daß einerley Zeichen im Product +, verschiedene aber — geben. Last uns setzen; + hiesse affirmo, und — nego; so hiesse + mit + multipliciren, affirmo me affirmasse. Derowegen ist + × + = +. Wenn — mit — multiplicirt werden soll: so heist dieses: einen Mangel leugnen, oder negare se negasse. Wer aber leugnet, daß er geleugnet habe, der bejahet. Wird also —, wenn es durch — multiplicirt wird, wol etwas anders, als + ausmachen können? Wenn man + durch — multiplicirt, so nimmt man einen Mangel etliche mal. Wer wollte aber zweifeln, daß ein vervielfältigter Mangel ein Mangel sey? oder grammaticalisch davon zu sprechen, so heisset + mit — multipliciren: affirmare se negasse. Wer aber behauptet, daß er geleugnet habe, der leugnet. Derowegen ist + × — = —.

Hieraus kan man folgendes Exempel beurtheilen:

$$\begin{array}{r} a + b - d \\ a - b - d \\ \hline -ad - bd + dd \\ -ab - bb + bd \quad \\ aa + ab - ad \quad\quad \\ \hline aa - bb - 2ad - 2bd + dd \end{array}$$

§. 15.

§. 15.

Die vierte und letzte Rechnungsart ist die Division. Nichts ist leichter, als sich davon einen Begriff zu machen, wenn man dasjenige, was vorher von der Multiplication gesagt worden, recht eingesehen hat. Man dividiret auch hier entweder + durch + oder — durch —, oder + durch — oder — durch +. In allen diesen Fällen hat die Regel statt: Einerley Zeichen geben in Quotienten +, verschiedene aber —.

Will man die Probe machen, so multiplicire man den Divisorem mit den Quotienten. Es wird weiter nichts erfordert, den Grund dieser Regel einzusehen, als der Satz aus der Rechenkunst: daß der andre Factor herauskommen müsse, wenn man mit dem einen in das Factum dividiret. Wenn ich nun — a mit + b multiplicire, so kömmt — ab heraus (§. 14.). Dieses ist das Factum. Wenn ich also dieses Factum — ab durch den einen Factorem + b dividire: so muß nothwendig der andre Factor — a herauskommen. Hingegen wenn ich eben dieses Factum — ab durch — a dividire, so muß der andre Factor — b herauskommen. Gleichwie nun hieraus erhellet, daß verschiedene Zeichen bey der Division — in den Quotienten geben, so ist leicht zu erachten, daß einerley Zeichen in Quotien-

ten + geben müssen. Denn wenn man + durch + dividiret: so nimmt man einen Theil einer würcklichen Grösse, ein Theil aber einer würcklichen Grösse, ist eine würckliche Grösse. Dividiret man aber — durch —, so leugnet man einen Theil einer verneinenden Grösse. Die Abwesenheit aber einer Grösse leugnen, heist so viel, als dieselbe setzen. Derowegen muß —, wenn es durch — dividiret wird, im Quotienten + geben. Also erhellet auch die Richtigkeit des andern Theils der angeführten Regel: daß + multipliciret mit + oder — multipliciret mit — im Quotienten jederzeit + gebe. Folgendes Exempel kan zur Uebung dienen.

$$aa - bb - 2ad + dd \; (a + b - d$$
$$a - b - d) \; aa - ab - ad$$

$$+ ab - bb - ad + dd$$
$$a - b - d) \; + ab - bb - bd$$

$$+ bd - ad + dd$$
$$a - b - d) \; - ad + bd + dd$$

$$0$$

Wir wollen die Probe machen, und den Quotienten $a + b - d$ mit $a - b - d$ multipliciren: so muß der Dividendus $aa - bb - 2ad + dd$ wieder herauskommen.

$$
\begin{array}{r}
a+b-d \\
a-b-d \\
\hline
-ad-bd+dd \\
-ab-bb+bd \quad \\
+aa+ab-ad \qquad \\
\hline
aa-bb-2ad+dd \qquad
\end{array}
$$

§. 16.

Alles was vorzunehmen ist, wenn man eine algebraische Aufgabe auflösen will, läßt sich bey drey Worten behalten. Diese sind Benennung, Gleichung und Ausführung (denominatio, aequatio & reductio). Von der Benennung haben wir bereits gehandelt, indem ich gesagt habe; man solle die bekannten Grössen mit den ersten und die unbekannten durch die letzten Buchstaben des Alphabets anzeigen. Dieses ist die gemeinste Art der Benennung, welcher man sich zu bedienen pflegt. Man darf aber nicht dencken, daß es die eintzige sey. Nein, man kan bisweilen die Benennung auf eine sinnreiche Art einrichten, die den Nutzen hat, daß wir eher zu der Erkäntniß der unbekannten Grössen gelangen, als sonsten geschehen seyn würde. Damit dieses deutlicher werde, so wollen wir setzen, man sollte aus der Summe zweyer Zahlen und ihrem Producte die Zahlen selber finden. In diesem Falle sind uns zwey Zahlen bekannt, wir

wissen nemlich, was herauskömmt, wenn man die Zahlen, welche wir zu wissen verlangen, zusammen addiret, wir wissen auch, was herauskömmt, wenn man sie mit einander multipliciret. Da nun solchergestallt die Summe und das Product bekannte Grössen sind: so hätte man die Summe a und das Product b nennen können, die beyden unbekannten Zahlen aber, aus denen diese Summe und dieses Product entstanden ist, hätten x und y heissen müssen. Nichts ist gewisser, als daß diese Benennung so beschaffen seyn würde, daß man dabey seinen Zweck erreichen, und die beyden unbekannten Zahlen würde haben finden können. Indessen kan dieses doch bey einer andern Benennung noch auf eine kürtzere, leichtere und bequemere Art geschehen. Denn wenn man die Summe a, das Product b und die halbe Differentz derer beyden unbekannten Zahlen, welche gleichfalls unbekannt ist, x nennet; so kan man folgenden arithmetischen Satz dabey anbringen: Wenn man zu der halben Summe zweyer Zahlen die halbe Differentz addiret, so kömmt die gröste, und wenn man von der halben Summe die halbe Differentz abziehet, so kommt die kleinere von ihnen heraus. Nun ist die Summe a und die halbe Differentz x genennet worden: wer sieht also nicht, daß man die grosse Zahl durch

$\frac{1}{2}a$

$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}x$ und die kleinere durch $\frac{1}{2}a-x$ andeuten könne. Das macht, es giebt mehrere Wege zu der Wahrheit zu gelangen. Einige sind weitläufig, und andere kurtz, einige angenehm, andere beschwerlich, einige mühsam und andere bequem. Wie glücklich ist nicht ein Gelehrter, welcher jederzeit den leichtesten, bequemsten und angenehmsten Weg nach dem Tempel der Wahrheit findet, und wie Auslachens würdig sind nicht diejenigen, die es für rühmlicher halten, durch einen grossen Umschweif, welcher sie in Dornen, Hecken und Morast führet, dahin zu gelangen, ohnerachtet sie die gerade Strasse vor Augen haben.

§. 17.

Das andere Stück, worauf man zu sehen hat, wenn man eine algebraische Aufgabe auflösen will, ist, daß man sich um eine Gleichung bekümmere. Was ist aber eine Gleichung? Nichts anders, als daß man eine Grösse mit zwey Nahmen zu belegen sucht, welche beyde Ausdrücke gleichgültig sind, und dadurch man in den Stand gesetzt wird, das bekannte und unbekannte in eine Verbindung zu setzen. Die Wahrheit vergleicht sich einer gewissen Art der Bilder, welche gantz etwas anders vorstellen, wenn man sie aus einem andern Gesichtspuncte ansiehet, ohnerachtet sie beständig dieselbigen verbleiben. Ist dieses

 nicht

nicht die Ursache, daß die Urtheile der Menschen so sehr verschieden sind, und daß eben dieselbige Sache diesem häßlich, jenem schön, diesem erschrecklich und jenem angenehm, diesem unvollkommen und jenem vollkommen erscheinet? Sähen sie die Sachen nicht blos von einer Seite an, so würden ihre Urtheile öfters gantz anders beschaffen seyn; aber so bedienen sie sich gar gewisser Gläser, die alles entweder zu groß oder zu klein vorstellen.

Den schönen Bau der Welt sieht leider iedermann
Durch seiner Leidenschaft verkehrtes Fernglas an,
Das alles, nur nicht sich verkleinert und entfernet,
Dadurch man sich allein, nur sich vergrössern lernet.

Die Algebraisten sind davon ausgenommen, denn diese wollen nicht nur mit ihren Augen sehen, sondern sie betrachten auch diejenigen Sachen, die sie kennen lernen wollen, von allen Seiten und aus allen Gesichtspuncten, um von ihrem Werthe ein unpartheyisches Urtheil fällen zu können. Ihre Gleichungen sind die deutlichsten Beweisthümer davon. Ein Exempel wird die Sache deutlicher machen. Man setze, es sollten aus der Summe zweyer Zahlen und ihrer

ihrer Differentz die Zahlen selber gefunden werden, die Summe wäre = a die Differentz = b, die kleine Zahl = x, und die grosse, = y: so darf man nach geschehener Benennung nur ein wenig nachdencken, um eine Gleichung zu finden. Denn wenn man erwägt: daß die Summe zweyer Zahlen entstehe, wenn man die Zahlen zusammen addiret, wenn man ferner bedenckt, daß die Summe a und die beyden Zahlen x und y heissen: so wird man nicht zweifeln, daß $a = x + y$. Dieses ist also eine Gleichung. Es ist darinnen a, das ist etwas bekanntes mit $x + y$ das ist mit etwas unbekannten in einen Zusammenhang gebracht worden. Folgt also nicht daraus, daß man iederzeit, wenn etwas zu erfinden ist, solche Wahrheiten wissen müsse, die mit denen, welche man zu wissen verlangt, in einer Verbindung stehen. Es ist aber wohl zu mercken, daß man iederzeit so viele Gleichungen haben müsse, als unbekannte Grössen vorhanden sind. In unserm Exempel sind zwey unbekannte Grössen x und y, daher müssen wir auch zwey Gleichungen haben. Die eine haben wir gefunden, last uns versuchen, ob wir auch die andere finden können. Es ist uns die Differentz zweyer Zahlen gegeben, und wir haben solche b genennet. Nun entstehet die Differentz, wenn man die kleinere Zahl von der grössern abzieht.

y ist

y ist die grössere, und x die kleinere Zahl. Derowegen ist $b=y-x$. Und dieses ist die andere Gleichung die wir hier nöthig haben.

§. 18.

Wenn man so viele Gleichungen hat, als unbekannte Grössen vorhanden sind, so wird die Reduction oder Buchstabenrechnung angestellt, vermittelst welcher man es dahin zu bringen sucht, endlich eine solche Gleichung zu finden, darinnen auf der einen Seite lauter bekannte, auf der andern aber nur eine unbekannte Grösse stehen bleibet. Denn wenn dieses geschehen ist, so hat man die unbekannte Grösse durch lauter bekannte erklärt, und da man von den bekannten Grössen deutliche Begriffe hat, so hat man dergleichen auch nunmehro von der unbekannten. Es ist also klar, daß die Rechnung nicht eher zu Ende gebracht sey, als bis man auf der einen Seite lauter bekanntes, und auf der andern lauter unbekanntes hat. So lange aber bekanntes und unbekanntes mit einander vermengt ist, muß man versuchen, dieses von einander zu trennen, und da entsteht billig die Frage: wie solches anzufangen sey? Meistentheils bestehet das Kunststück darinne, daß man die Grössen, welche durch Addition mit einander verbunden sind, durch die Subtraction, die durch Subtraction verbunden sind, durch Addition, die durch Multiplication ver-

verbunden sind, durch die Division, und die durch Division verbunden sind, durch die Multiplication von einander zu bringen sucht. Wovon sich der Grund gar leichte aus den arithmetischen Grundsätzen: Wenn gleiches und gleiches addiret, subtrahiret, multipliciret und dividiret wird, so muß gleiches herauskommen, herleiten läst. Oder man erhebt die Grössen einer Gleichung zu einerley Dignität, oder man ziehet aus den Grössen der Gleichung einerley Wurtzel aus. Denn wenn man gleiche Grössen zu einerley Dignitäten erhebt, oder aus ihnen einerley Wurtzel auszieht, so muß ebenfalls vermöge der angeführten arithmetischen Grundsätze gleiches herauskommen, wie sich durch die Exempel bald deutlicher zeigen wird.

§. 19.

Aus dem, was hier gesagt worden ist, erhellet, daß die Reduction den Zusammenhang zwischen denen bekannten und unbekannten Warheiten gebe. Sie ist so zu sagen die Brücke, deren wir uns nothwendig bedienen müssen, weil die Natur keinen Sprung thut. Und solchergestallt kan man sie als den Beweiß von dem gefundenen Lehrsatze ansehen. Hierauf beruhet das allerweiste, wenn man eine Wissenschaft, und folglich auch die Algebra auf eine leichte und iedermann begreifliche Art vortragen will. Denn

Denn wir mögen die Beweise der Mathematicker oder die algebraischen Rechnungen betrachten: so werden wir finden, daß sie nichts anders sind, als ein Haufen aneinander hängender Vernunftschlüsse. Es sind aber aneinanderhängende Vernunftschlüsse solche, da die Schlußrede des vorhergehenden zugleich einen Fordersatz zu den folgenden abgiebt. Je mehr ich es daher überlege, je mehr finde ich, daß es vernünftig sey, die Fertigkeiten des Verstandes eben so wie die Fertigkeiten der Bewegungen des Leibes zu erhalten. Ein Kind weiß anfangs nicht, wie es gehen soll, nach und nach bekömmt es einen Trieb darzu, dieser macht, daß es einige Versuche anstellt, sie gerathen aber meistentheils unglücklich, und es wird durch das Fallen überführt, daß es seine Sachen nicht recht gemacht habe. Es sucht daher inskünftige dergleichen zu vermeiden, und andere Bewegungen vorzunehmen, bis es endlich, doch nicht ohne Furcht zu fallen, gehen lernet. Durch viele Uebung aber wird es dahin gebracht, daß man zugleich gewisse und geschwindere Schritte thun lernet, ja endlich macht eben diese Uebung, daß ein Mensch die gefährlichst scheinenden Sprünge gantz glücklich verrichten kan. So ist es gerade auch mit dem Verstande beschaffen. Wir kommen gantz nagelneu in die Welt, und wissen von nichts was darinnen

innen vorgehet, ohnerachtet uns Plato versichert, daß wir vor 36000 Jahren schon einmahl darinnen gewesen sind. Nach und nach bekommen wir durch die Sinne Begriffe, welche immer klärer werden. Hierauf fangen wir an, diese Begriffe unter einander zu vergleichen, und bringen dadurch Urtheile hervor. Ja endlich bekommen wir die Geschicklichkeit, aus zweyen Urtheilen, die einander gewisser massen ähnlich sind, ein drittes zu finden, das uns vorher nicht bekannt war, das heist, wir fangen an Schlüsse zu machen. Viele Fehler lernen uns die Regeln, nach welchen sie gemacht werden müssen, kennen, ohne daß wir diese Regeln sagen könten. Aber auch dabey bleibt man nicht stehen, sondern man fängt an Schlüsse unter einander zusammen zu hängen, und wenn man dieses thut, so beweist man dadurch, daß man eine Vernunft habe. Wer sieht also nicht, daß es die Vernunft sey, vermittelst welcher die Wahrheiten wie die Glieder an einer Kette an einander gehenckt werden. Bey den meisten Menschen ist diese Kette sehr kurtz, bey den Gelehrten sollte sie von rechtswegen länger seyn, aber wenn man die Wahrheit sagen soll, so besitzen sehr viele von ihnen zwar eine grosse Menge solcher kleinen Ketten, aber sie wissen nicht, wie sie sie an einander fügen sollen. Das macht, man bedenckt

nicht,

nicht, daß die ersten Schritte, welche man nach dem Tempel der Weisheit thut, sehr langsam und mit vielem Bedachte verrichtet werden müssen, bis man nach und nach geschwinder gehen lernet, und endlich die Geschicklichkeit bekömmt, gar einen gelehrten Läufer abzugeben. Die geschicktesten unserer Führer sind meistentheils von der letztern Art. Wollen wir uns also wundern, wenn wir ihnen nicht folgen können, oder allenfalls ihre Fußstapfen nur von weiten erblicken, ohne zu begreiffen, wie sie dieselben gemacht haben. Sie lassen in ihren Beweisen viele Schlüsse aussen, und setzen vieles zum voraus, welches dem, der sie verstehen soll, zu wissen nothwendig ist, sie bedencken aber nicht, daß ein Kind einem Läuffer nicht folgen könne, wenn es nicht vorher alle die Uebungen angestellet hat, die er hat machen müssen, ehe er diese Fertigkeit erhalten hat. Denn das ist einmal vor allemal ausgemacht, daß man sich bey einem Beweise alle ausgelassene Sätze und Schlüsse gedencken müsse, wenn man überführt seyn will. Setzt sie mir nun ein Verfasser vor Augen, so darf ich sie nur lesen, sind sie aber ausgelassen, so muß ich ihren Mangel durch eigenes Nachdencken ersetzen. Wir haben eine Probe von einer so danckeln Art des Vortrages an den Schriften des berühmten Newtons. Seine Erfindungen

sind

vortrefflich, aber sie sind auf eine so kurtze Art erwiesen, daß man nicht ohne grosse Mühe davon überführet werden kan. Ihm selbst war alles vollkommen deutlich, aber es fiel ihm verdrießlich, es andern eben so deutlich zu machen. Denn wenn dieses ein Gelehrter thun will, so muß er eben die Beschwerlichkeiten dabey übernehmen, welche ein junger und im Laufen geübter Mensch haben würde, wenn er von einem Orte zum andern niemals anders, als mit kurtzen und langsamen Schritten, nach Art der kleinen Kinder, gehen sollte. Einige Gelehrte scheinen dieses eingesehen zu haben, und dieses hat sie auf den Entschluß gebracht, niemals anders, als mit kindischen Schritten zu gehen, aber sie müssen sich auch dabey nicht nur dieses gefallen lassen, daß sie auf diese Weise nicht weit fortkommen, sondern, daß sie auch von allen, welche etwas fertiger gehen können, ausgelacht werden. Dieses sind diejenigen, welche es für nöthig halten, alle Kleinigkeiten durch einen Vernunftschluß zu beweisen, und die das quicunque, atqui, ergo, zu ihrem Wahlspruche erwählt haben. Wer kan sich z. E. wohl des Lachens enthalten, wenn man aus dem Begriffe des Einheitzens mit vieler Gelehrsamkeit die drey Sätze herleiten wollte: Zum Einheitzen wird ein Ofen erfordert. Man muß Holtz hineinlegen, und das Holtz

anzünden. Gleichwol haben wir in der That Schriften, darinnen dergleichen unbegreifliche Wahrheiten erwiesen sind. Es wird also auch wol hier am vernünftigsten seyn, die Mittelstrasse zu halten. Einen gelehrten Luftspringer, welcher ein paar Dutzend Vernunftschlüsse auf einmal glücklich überhüpfen kan, bewundre ich, und mit einem gelehrten Kinde, das nur Schritt vor Schritt gehet, habe ich Mitleiden; könte es aber in der That geschwinder gehen, als es thut, so verdient es ausgelacht zu werden. Die meisten gelehrten Luftspringer sind unglücklich, nur die Mathematicker nehmen selten Schaden. Aber das ist es eben, was die Algebra so schwer macht. Man trifft darinnen Conclusionen ohne Prämissen an, welche gewöhnlicher Weise nicht citirt werden, ja man findet Sätze, zu deren Erkäntniß man nicht anders, als durch mehrere Schlüsse gelangen kan, welche gleichwol nicht vorhanden sind. Dadurch werden die algebraischen Rechnungen kurtz, zugleich aber auch ungeübten Lesern beschwerlich gemacht. Man erblickt öfters auf einer Seite so viel, was sonsten in einem gantzen Buche kaum Platz haben würde, aber man muß auch ein gantzes Buch durch seinen Kopf gehen lassen, ehe man diese Seite begreifen kan. Dieses ist also das vornehmste Kunststück, worauf die Erleichterung

der

der Algebra beruhet. Wir wollen an einigen Exempeln die Probe machen.

§. 20.

Aufgabe.

Es ist uns bekannt die Summe zweyer Zahlen oder Grössen und ihr Unterscheid, wir sollen die Grössen selber finden.

Auflösung.

1) Benennung.

Es sey die Summe $= a$ Die kleine Grösse $= x$
Der Unterschied $= b$ die grosse $= y$

2) Gleichung.

$a = x + y$ (§. 17.) $b = y - x$

3) Ausführung.

n. 1.

$a = x + y$ (n. 2.)
$x = x$ (Wolff. Ar. §. 20.)

Derowegen ist $a - x = y$ (§. 25. Arithm.)

n. 2.

$b = y - x$ (n. 2.)
$x = x$ (Wolff. Ar. §. 20.)

Derowegen $b + x = y$ (§. 24. Arithm.)

$a - x = y$ (n. 1.)
$b + x = y$ (n. 2.)

Also ist $a - x = b + x$ (§. 22. Ar.)
$x = x$ (§. 20. Ar.)

Derowegen ist $a = b + 2x$ (§. 24. Ar.)
$b = b$ (§. 20. Ar.)

Also ist $a - b = 2x$ (§. 25. Ar.)
$2 = 2$ (§. 20. Ar.)

Derowegen $\frac{a - b}{2} = x$ (§. 27. Ar.)

Nun ist $\frac{a}{2} = \frac{1}{2}a$ und $\frac{b}{2} = \frac{1}{2}b$.

Also ist $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = x$ (§. 15. Anmerck.)

W. Z. E. W.

a ist die Summe der beyden Grössen (n. 1.) b ist ihr Unterscheid (n. 1.) Derowegen ist $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}b$ so viel als die halbe Summe und halbe Differentz der beyden Grössen. x ist die kleinste von ihnen (n. 1.). Kan es also wol schwer fallen, den Satz $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = x$ ins teutsche zu übersetzen? Es kan aber nicht anders als folgender gestalt ausgelegt werden: *Wenn man von der halben Summe zweyer Grössen ihre halbe Differentz subtrahiret: so kömmt die kleinste von ihnen heraus.*

§. 21.

Dieses ist es eben, was wir zu wissen verlangten, und wir sind unsers Wunsches theilhaft worden, da wir auf der einen Seite lauter bekannte, und auf der andern lauter unbekannte Grössen haben. Wir haben aber den oben gegebenen Regeln gefolgt (§. 18.). Last uns die Probe machen. Es sey also die Summe zweyer Zahlen, welche wir a genennt haben, $= 14$.
Ihre Differentz, welche b heist $= 2$:
so ist $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ (§. 20.).

Nun ist $\frac{1}{2}a = 7$
und $\frac{1}{2}b = 1$

Derowegen $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = 7 - 1 = 6$.

Also ist die kleineste von den beyden Zahlen, deren Summe 14, und deren Differentz 2 ausmacht, so viel als 6. Wird es nun wol ein grosses Kopfbrechen kosten, die grössere davon zu entdecken, wenn wir bedencken, daß die Summe zweyer Zahlen ein Gantzes sey, welches aus den zweyen Zahlen als zweyen Theilen zusammengesetzt ist? Denn wenn man dieses zum voraus setzt: darf man nur von der Summe der beyden Zahlen, welche in unserm Exempel 14 ist, die kleinere Zahl, welche, wie wir gefunden haben, 6 ist, subtrahiren: so muß die grössere, 8 übrig bleiben.

Es sey $a = 30$, $b = 8$: so ist $\frac{(a-b)}{2} = \frac{(30-8)}{2} = 15 - 4 = 11 = x$.

Also die grössere Zahl $y = 30 - 11 = 19$.

§. 22.

Ich habe schon gedacht, daß es mehr als einen Weg gebe, zu der Erkäntniß der Wahrheit zu gelangen, obgleich einer immer kürtzer und leichter ist als der andere. Daher giebet es auch mehrere Auflösungen von einer algebraischen Aufgabe. Wir wollen bey unsrer gegenwärtigen bleiben, und sehen, wie sie sich noch auf mehrere Arten auflösen lasse. Es sey also wie vorhin (§. 20.).

$x + y = a$ (n 2.)
$y - x = b$

$2y = a + b$ (§. 14.) gleiches zu gleichen addirt
$2 = 2$ (§. 20. Ar.)

$y = \frac{a+b}{2}$ (§. 27. Ar.)

und weil $\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$; so ist $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

§. 23.

§. 23.

In voriger Auflösung haben wir die beyden Gleichungen zusammen addirt, nun wollen wir sie von einander subtrahiren.

Es sey also $a = x + y$
$b = y - x$ (§. 20. n. 2)

so ist $a - b = 2x$ (§. 25. Ar.)
$2 = 2$

also ist $\frac{a - b}{2} = x$ (§. 27. Ar.)

und weil $\frac{a - b}{2} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$

so ist $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ (§. 22. Ar.)

Das ist, weil a die Summe, b die Differentz, und x die kleine Grösse ist (§. 20.), eben so viel, als wenn man gesagt hätte: **Wenn man von der halben Summe zweyer Grössen ihre halbe Differentz abziehet: so bleibt die kleinere von ihnen übrig.**

§. 24.

Last es uns noch auf eine andere Art versuchen.

Es sey die Summe zweyer Zahlen $= a$, ihre Differentz $= b$, die kleinere Zahl $= m$. Weil nun die grosse Zahl aus der kleinen und

der Differentz bestehet, da z. E. 8 aus der kleinern Zahl 6 und der Differentz von 8, das ist 2, und folglich aus 6 und 2 zusammengesetzt ist (§. 21. Anmerck.): so kan man die grosse Zahl $m + b$ nennen.

Es ist also die kleine Zahl $= m$
Die grosse $= m + b$

Also die Summe beyder Zahlen $= 2m + b$
Nun ist die Summe $= a$ (n. 1.)

Also ist $a = 2m + b$ (§. 15. Anm.)
$b = b$ (§. 20. Ar.)

Derowegen ist $a - b = 2m$ (§. 25. Ar.)
$2 = 2$ (§. 20. Ar.)

Also ist $\frac{a - b}{2} = m$ (§. 27. Ar.)

und weil $\frac{a - b}{2} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ (§. 20.)

so ist $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = m$ (§. 15. Anm.)

Das ist: **Wenn man von der halben Summe zweyer Zahlen $= \frac{1}{2}a$ subtrahiret die halbe Differentz derselben $= \frac{1}{2}b$: so bleibet die kleinere Zahl $= m$ übrig.**

§. 25.

Wer diese hier beygebrachte Ausführung betrachtet, der wird finden, daß sie

sich

sich durch Vergleichung mit den citirten paragraphis in lauter förmliche Schlüsse verwandeln lasse. Es beobachtet also auch die Algebra die Regeln der Vernunftlehre, und ihre Rechnungen sind nichts anders, als eine Menge aneinanderhängender Vernunftschlüsse. Also wird es vermuthlich denenienigen, welche in die Logic und Metaphysic eine tiefe Einsicht besitzen, sehr leicht seyn, die Algebra zu erlernen, sie werden dieses als eine Art des Zeitvertreibes gebrauchen, wenn sie von Nachdencken ermüdet sind, und neue mathematische Wahrheiten zu entdecken, wird die allergeringste ihrer Beschäftigungen seyn. Ich kan nicht davon urtheilen, so viel aber weiß ich, daß man bisher sehr wenig solche Heldenthaten gesehen hat. Und dieses nimmt mich gar nicht Wunder. Denn die Vernunftlehre zeigt uns zwar, wie wir dencken sollen, aber sie giebt uns nicht die Fertigkeit, dieses zu thun. Sie ist also einem Tantzmeister ähnlich, welcher seinem Schüler alle Gänge und Wendungen, welche er bey dem Tantzen machen muß, gantz genau auf das Papier zeichnet, wodurch er, ohnerachtet er alles auf das deutlichste begreift, doch nimmermehr in den Stand gesetzt wird, eine Menuet zu tantzen. Ein grosser Mathematicker hat die Vernunftlehre daher dem Gesetze verglichen, welches uns zwar sagt, was wir thun sollen, aber keine Kraft

giebt, die wir von dem Evangelio zu gewarten haben. Daher muß ich allemahl ein klein wenig lachen, wenn ich junge Leute, die ihren Verstand verbessern wollen, mit dem ausdrücklichen Befehle von ihren Vorgesetzten versehen erblicke, die Vernunftlehre, sonst aber nichts von der Mathematick und Philosophie zu studiren. Denn nach meinem Begriffe heist dieses nichts anders, als tantzen lernen, nachdem man sich von dem Tantzen einen deutlichen Begriff gemacht hat, ohne es iemals zu versuchen. Denn in Wahrheit, es ist in diesem Stücke mit dem Verstande nicht anders beschaffen, als mit dem Tantzen. Nun stelle man sich zwey Personen vor, welche tantzen lernen wollten, dem einen wären alle Täntze auf das genaueste auf das Papier gezeichnet, und er betrachtete sie mit der grösten Aufmercksamkeit, ohne sich zu bewegen, ein anderer aber wüste gar keine Regeln, wie er tantzen sollte, er gäbe aber darauf acht, wie andere tantzten, und suchte solches nach zu machen. Welcher von diesen beyden würde wol am ersten ein Tantzmeister werden? Ich glaube der letztere. Denn das Tantzen erfordert eine Fertigkeit, die nicht anders, als durch viele Uebung erhalten werden kan. Wollen wir dieses bey dem Verstande wieder anbringen, so würde folgen, daß eine Fertigkeit im Dencken nicht

so wol durch viele Regeln, als vielmehr durch vielfältige Uebungen zuwege gebracht werden könte. Wo treffen wir aber wol dergleichen Uebungen an, als in der Mathematick, und sind nicht die übrigen Wissenschaften nur blos darum hoch zu schätzen, weil sie dieser ihrer Königin ähnlich zu werden suchen. Darum hat der Herr Baron von Wolf gantz recht, wenn er einem ieden, der seinen Verstand schärfen will, rathet, die Mathematick noch vor der Vernunftlehre zu erlernen. Denn wenn man auf diese Art verfähret, so fehlt es niemals an Exempeln in der Vernunftlehre, und man erblickt die Gesetze mit Vergnügen, nach welchem man zu handeln gewohnt ist, ohne sie gekannt zu haben. Wäre es die Vernunftlehre, welche die Menschen klug machen sollte; so müste man zu denen Zeiten des Aristoteles und der Schulweisen ungemein klug gewesen seyn, man ist es aber niemals weniger gewesen, als eben damals. Man würde sich sehr irren, wenn man die Schuld davon auf die damalige Beschaffenheit der Vernunftlehre schieben wollte. Denn haben wir es nicht ihnen zu dancken, daß sie alle möglichen Figuren und Modos derer Syllogismen nicht nur entdeckt, sondern auch auf eine gewiß recht sinnreiche Art, welche eine Probe der Zeichenkunst abgeben kan, in ein Barbara Celarent Darii Ferio

rio rc. eingekleidet haben. Aber so groß die Gewißheit dieser Erfindung ist, so geringe ist ihr Nutzen. Denn man müste wahrhaftig Methusalems Alter haben, wenn man ein Algebraiste werden wollte, und es nicht nur vor nöthig hielte, alle seine Gedancken in förmliche Schlüsse zu verwandeln, sondern auch zu bestimmen, in welcher Figur und Modo ein ieder Schluß gemacht worden, und ob er den Regeln dieser Figur und Modi gemäß wäre. Deswegen verachte ich aber die Regeln der Vernunftlehre nicht, nein, ein Gelehrter muß einem Tantzmeister ähnlich seyn, welcher, nachdem er durch eine natürliche Geschicklichkeit und vielfältige Uebung tantzen gelernet hat, noch zur Zierde seiner Kunst die Täntze auf das Papier zu zeichnen weiß. Denn daß auch die natürliche Geschicklichkeit darzu erfordert werde, und daß die Vernunftlehre aus einem Esel keinen Menschen machen könne, ist mehr als zu gewiß, daß man sich aber so wenig darum bekümmert, kömmt daher, weil ein ieder von seiner Mutter die Versicherung hat, daß er ungemein klug sey.

§. 26.

Nachdem ich in der vorigen Auflösung den Mangel der fehlenden Sätze durch das Citiren ersetzt habe: so können es meine Leser schon wagen, dieselbe in der algebraischen Sprache zu lesen. Hier ist sie:

1)
$$a = x + y$$
$$b = y - x$$
$$a - x = b + x$$
$$a = b + 2x$$
$$\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b = x$$

2)
$$a = x + y$$
$$b = y - x$$
$$a + b = 2y$$
$$\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b = y$$

3)
$$a = x + y$$
$$b = y - x$$
$$a - b = 2x$$
$$\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b = x$$

4)
$$a = 2m + b$$
$$a - b = 2m$$
$$\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b = m$$

§. 27.

Aufgabe.

Man soll sagen, was es für eine Zahl sey, deren Hälfte, Drittel und Viertel um 1 grösser ist als die Zahl selbst.

Auf-

Auflösung.

1) Benennung.

Weil nur eine Zahl zu finden ist: so nennet sie x.

2) Gleichung.

Da wir nicht mehr als eine unbekannte Zahl haben: so brauchen wir auch nur eine Gleichung. Diese giebt sich aus der Beschaffenheit der Aufgabe selbst. Denn es soll die Hälfte der unbekannten Zahl, das ist $\frac{1}{2}x$, das Drittel der unbekannten Zahl $= \frac{1}{3}x$ und das Viertel derselben $= \frac{1}{4}x$ so viel ausmachen, als die unbekannte Zahl und Eines, das ist $x + 1$. Also bekommen wir folgende Gleichung:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1.$$

3) Ausführung.

Es ist $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$. (n. 2.) Da diese Brüche zusammen addirt werden sollen, und doch verschiedene Nenner haben: so müssen sie vorher unter einerley Benennung gebracht werden (§. 65. Ar.). Wenn man dieses thut, so bekömmt man an statt $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ folgende gleichgültige Brüche: $\frac{12}{24} + \frac{8}{24} + \frac{6}{24}$.

Dero-

Derowegen ist
$\frac{12}{24}x + \frac{8}{24}x + \frac{6}{24}x = x + 1$ (§. 15. Anm.)
Nun ist
$\frac{12}{24}x + \frac{8}{24}x + \frac{6}{24}x = (12x + 8x + 6x) : 24$
(§. 58. Anmerck.)

Derowegen ist
$(12x + 8x + 6x) : 24 = x + 1$ (§. 22. Ar.)
Man addire diese Zahlen würcklich: so ist
$(12x + 8x + 6x) : 24 = \frac{26}{24}x$

Also ist $\frac{26}{24}x = x + 1$ (§. 22. Ar.)
$24 = 24$ (§. 20. Ar.)

Man multiplicire also mit 24:
so ist $26x = 24x + 24$ (§. 26. Ar.)

Denn wenn ich einen Bruch mit seinem Nenner multiplicire: so kömmt allemal der Zehler heraus; weil die Multiplication die Division wieder aufhebet. Derowegen wenn ich $\frac{26}{24}x$ durch 24 multiplicire: so bekomme ich $26x$. Und wenn ich $x + 1$ mit 24 multiplicire: so kömmt $24x + 24$ heraus.

Es ist also $26x = 24x + 24$
subtr. $24x = 24x$ (§. 20. Ar.)

$2x = 24$ (§. 25. Ar.)
divid. $2 = 2$ (§. 20. Ar.)

$x = 12$ (§. 27. Ar.)

W. Z. E.

§. 28.

§. 28.

Es ist also 12 dieienige Zahl, deren Hälfte, Drittel und Viertel um 1. grösser ist, als sie selbst. Denn die Hälfte von 12 ist 6, das Drittel ist 4, und das Viertel ist 3. Dieses macht zusammen addirt 13 aus, welches um 1 mehr ist als 12.

§. 29.

Nun ist es kein Rätzel mehr, wenn man lieset:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$$

$$\frac{26}{24}x = x + 1$$

$$26x = 24x + 24$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

§. 30.

Man kan zur Uebung noch allerley Exempel machen, als wenn man setzet $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 2$: so findet man $x = 24$. Also ist die Hälfte, das 3tel und 4tel von 24 um 2 grösser als 24. Denn $12 + 8 + 6 = 26 = 24 + 2$.

Setzet $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 3$:
so ist $x = 36$.

Und wenn $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 4$:
so ist $x = 48$. u. s. w.

§. 31.

§. 31.

Nimmt man eine ungereimte Bedingung an: so bekömmt man auch etwas ungereimtes heraus, und die Falschheit des angenommenen Satzes wird immer grösser, je weiter wir die Rechnung fortsetzen. Daher zeigen sich entweder die Mittel, wie die Aufgabe aufzulösen sey, oder man findet, daß sie etwas widersprechendes in sich halte, und also an und vor sich selbst unter die Unmöglichkeiten gehöre. Last uns z. E. die unmögliche Bedingung annehmen, es sollte die Helfte, $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ einer Zahl eben so groß seyn als die Zahl selbst: so wäre

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x = x$$

$$\frac{12}{24}x + \frac{8}{24}x + \frac{18}{24}x = x \quad \text{(zu einerl. Benenn.)}$$

$$\frac{38}{24}x = x \quad \text{(würcklich addirt)}$$

$$38x = x \quad \text{(mit 24 multiplicirt.)}$$

Welches ungereimt ist. Denn es soll die Zahl eben so groß bleiben, als sie vorher war, ohnerachtet man sie durch 38 multiplicirt hat. Indessen wollen wir doch die Rechnung weiter fortsetzen. Es war:

$$38x = x$$
$$x = x \quad \text{(subtrah.)}$$

$$37x = 0$$
$$37 = 37 \quad \text{(divid.)}$$

$$x = \frac{0}{37} = 0$$

Also wäre x der 37ste Theil von Nichts. Der 37ste Theil von Nichts aber ist Nichts.

§. 32.

Es sey

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{8}x = x - 1$$

$$\tfrac{32}{64}x + \tfrac{16}{64}x + \tfrac{8}{64}x = x - 1 \quad \text{(einerl. Ben.)}$$

$$\tfrac{56}{64}x = x - 1 \quad \text{(würckl. addirt)}$$

$$\begin{array}{rcl} 56x &=& 64x - 64 \quad \text{(64 multipl.)} \\ 64 &=& 64 \quad \text{(addirt)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 56x + 64 &=& 64x \\ 56x &=& 56x \quad \text{(subtrahirt)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 64x &=& 8x \\ 8 &=& 8 \quad \text{(dividirt)} \end{array}$$

$$8 = x$$

Denn $\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{8}x = 4 + 2 + 1 = 7$

Es ist aber $7 = 8 - 1$.

§. 33.

Setzet ferner:

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{6}x + \tfrac{1}{8}x = x + 1$$

$$\tfrac{192}{384}x + \tfrac{96}{384}x + \tfrac{64}{384}x + \tfrac{48}{384}x = x + 1$$

$$\tfrac{400}{384}x = x + 1$$

$$400x = 384x + 384$$

$$\begin{array}{rcl} 16x &=& 384 \\ 16 &=& 16 \end{array}$$

$$x = 24$$

§. 34.

§. 34.

Ich habe mit Fleiß bey den letztern Exempeln die Citationen und Erläuterungen hinweggelassen. Denn man muß sich nach und nach gewöhnen, eine mathematische Auflösung auch ohne dieselben zu lesen; indem es sehr verdrüßlich seyn würde, einerley Sache vielfältig zu wiederholen. Nein, man muß nach und nach anfangen, auch härtere Speisen zu verdauen. Indessen gehört doch einige Klugheit dazu, wenn ein mathematischer Koch seinen Gästen lauter solche Dinge vorsetzen soll, die ihr Magen vertragen kan, und doch nicht eckelhaft sind. Das Kunststücke besteht hauptsächlich darinnen, daß man nur in denen Fällen, wo ein noch nicht erläuterter algebraischer Kunstgriff vorkömmt, seinen Zusammenhang mit den ersten mathematischen Grundwahrheiten zeiget, nicht aber durch vielfältige Wiederholung der deutlichsten Sachen seinen Lesern beschwerlich falle. Wir sehen es so gar in der Musick, daß uns allzuklare Vorstellungen fast eben so wie allzudunckle verdrüßlich fallen. Denn woher kömmt es, daß viele Octaven hintereinander übel klingen, ohnerachtet sie die vollkommensten Consonantien sind? In Wahrheit, aus keiner andern Ursache: als weil uns die ofte Wiederholung klarer Vorstellungen verdrüßlich fällt. Hieraus erhellet also, wie man es

machen müsse, wenn man die Algebra auf eine leichte und iedermann begreifliche Art und Weise vortragen will. Das gantze Kunststücke ist so leichte und so natürlich, daß es mich Wunder nimt, warum man sich desselben nicht längstens bedienet. Vermuthlich aber ist es darum nicht geschehen, weil man sich eingebildet hat, es werde dadurch diese Wissenschaft ausserordentlich weitläuftig gemacht werden. Ich gestehe es, daß dieser Einwurf etwas wahres in sich enthalte. Denn ein Vortrag muß nothwendig weitläuftiger werden, wenn man alle die Sätze anführt, die man sonst auszulassen gewohnt ist. Aber diese Weitläuftigkeit ist so groß nicht, als man sich anfangs eingebildet: weil man nicht nöthig hat, in ähnlichen Fällen mehr als einmal alles deutlich aus einander zu setzen. Denn wer es hernach nicht begreiffen kan, der muß von Natur einen blöden Verstand haben; und da es besser ist, daß dergleichen Leute mit dem Studiren sich nichts zu thun machen: so halte ich es selber nicht vor nöthig, daß man um ihrer Einfalt willen einen Duodezband in einen Folianten verwandele. Da indessen aber doch die Buchdruckerfarbe keine so kostbare Materie ist, als der Nervensaft eines vernünftigen Menschen: so kan auch iene mit leichterer Mühe als diese verschwendet werden; und es ist besser

zwey Zeilen mehr zu drucken, als sich zwey Stunden vergeblich den Kopf zu zerbrechen. Aber wenn man die Wahrheit sagen soll: so haben bisweilen die geschicktesten Algebraisten nicht die Geschicklichkeit, sich auf eine deutliche Art auszudrucken. Es geht ihnen vielmehr wie denen Gelehrten, von welchen man zu sagen pflegt: sie könnten es nicht von sich geben; und da alle Vomitive vergebens sind, weil sie zwar klare, aber keine deutliche Begriffe haben. Man thut also solchen Gelehrten zu viel, wenn man behauptet, es sey der Mangel der Erkänntniß schuld daran, daß sie sich nicht ausdrücken können. Nein, unsre Begriffe können dem ohnerachtet vollkommen klar seyn. Denn man stelle sich einen Blinden vor, welcher von uns eine Erklärung der rothen Farbe verlangte, werden wir sie ihm so geben können, daß er zufrieden seyn kan? nimmermehr. Nicht aber, weil wir gar keinen Begriff davon hätten, denn dieser ist vollkommen klar; sondern weil wir keinen deutlichen Begriff haben. Ohnerachtet nun hieraus so viel klar ist, daß ein Gelehrter, welcher es nicht von sich geben kan, dem ohnerachtet ein Gelehrter seyn könne: so sollen doch billig alle diejenigen, welche andern Wissenschaften entweder mündlich oder schriftlich vortragen sollen, mit einer deutlichen Erkänntniß versehen seyn. Denn es

ist seltsam, wenn man iemanden etwas begreiflich machen will, das man ihm nicht sagen kan.

§. 35.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Summe zweyer Zahlen, und dem Producte einer Zahl in die andere, die Zahlen selber zu finden.

Auflösung.

1) Benennung.

Weil die Summe der beyden Zahlen gegeben ist: so nennet sie a, und aus gleichmäßiger Ursache ihr Product b. An statt aber die grössere unbekannte Zahl y, und die kleinere x zu nennen, wollen wir blos die halbe Differentz der beyden unbekannten Zahlen suchen: Denn wenn wir diese wissen: so können wir gar leicht die Zahlen selber finden. Es sey also die halbe Differentz der unbekannten Zahlen = x. Nun haben wir gefunden, daß die grosse Zahl herauskomme, wenn man zu der halben Summe die halbe Differentz addiret, und daß die kleine gefunden werde, wenn man von der halben Summe die halbe Differentz subtrahirt (§. 20.).

Es

Es ist aber die Summe $= a$
Die halbe Differenz $= x$

Derowegen ist die gröste Zahl $= \frac{1}{2}a + x$
und die kleine $= \frac{1}{2}a - x$ (§. 20.)

2) Gleichung.

Das Product beyder Zahlen, welches wir b genennt haben (n. 1.) entstehet, wenn man beyde Zahlen mit einander multipliciret. Nun ist die eine Zahl $= \frac{1}{2}a + x$, und die andere $= \frac{1}{2}a - x$. Derowegen ist das Product $b = \frac{1}{2}a + x$ multiplicirt durch $\frac{1}{2}a - x$.

Man multiplicire also:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}a + x \\ \frac{1}{2}a - x \\ \hline - \frac{1}{2}ax - xx \\ \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ax \\ \hline \end{array}$$

so ist das Product $\frac{1}{4}aa - xx$
Derowegen ist $b = \frac{1}{4}aa - xx$.

3) Ausführung.

Es ist $b = \frac{1}{4}aa - xx$ (n. 2.)
$xx = xx$ (addiret)

Derowegen $b + xx = \frac{1}{4}aa$ (§. 24. Ar.)
$b = b$ (subtrahirt)

$xx = \frac{1}{4}aa - b$ (§. 25. Ar.)

xx ist so viel als x multiplicirt durch x. Eine Zahl, welche entsteht, indem eine andere durch sich selbst multiplicirt wird, ist das Quadrat der andern.

Also ist xx ein Quadrat, x aber die Wurtzel davon. Wir finden also x, wenn wir aus xx die Quadratwurtzel ausziehen. Damit aber die Gleichheit erhalten werde: so müssen wir auch aus $\frac{1}{4}aa - b$ die Quadratwurtzel ausziehen, und dieses zeigen wir dadurch an, wenn wir das Wurtzelzeichen $\surd$ davor setzen.

Es ist also $x = \surd(\frac{1}{4}aa - b)$

Denn daß gleiches herauskommen müsse, wenn man aus zwey gleichen Grössen die Quadratwurtzeln auszieht, ist aus dem arithmetischen Grundsatze klar: Wenn man gleiches durch gleiches dividiret, so kommen gleiche Quotienten heraus.

§. 36.

Last uns die Probe machen:

Es sey die Summe zweyer Zahlen $= a = 14$.
Das Product derselben $= b = 48$:
so ist $x = \surd(\frac{1}{4}aa - b)$
Nun $a = 14$. Also $aa = 14 \times 14 = 196$.
Also $\frac{1}{4}aa = \frac{196}{4} = 49$.
b ist $= 48$. Derowegen ist $\frac{1}{4}aa - b = 49 - 48 = 1$ und $\surd(\frac{1}{4}aa - b) = \surd 1 = 1$.
Also ist $x = 1$. Nun ist x die halbe Differentz der beyden Zahlen (§. 35. n. 1.), die grosse ist $\frac{1}{2}a + x$ und die kleine $\frac{1}{2}a - x$ (§. 20. n. 1.). Es ist aber $\frac{1}{2}a = 7$. Derowegen $\frac{1}{2}a + x = 7 + 1 = 8$, und $\frac{1}{2}a - x = 7 - 1 = 6$.

$= 6$. Folglich sind 6 und 8 die beyden Zahlen, welche zusammen addiret 14 und mit einander multipliciret 48 ausmachen.

§. 37.

Weil $\frac{1}{4}aa = \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}a$ (§. 68. Ar.), und $\frac{1}{2}a$ in unserm Exempel $= 7$ (§. 36.): so ist $\frac{1}{4}aa = 7 \times 7 = 49$. Also hätte man $\frac{1}{4}aa$ auch auf diese Art finden können.

§. 38.

Wollte man wieder aus der letzten Gleichung eine Regel machen: so müste man sich gefallen lassen, sie mit Worten auszudrucken, alsdenn aber würde sie folgendergestalt lauten:

> **Die halbe Differenz zweyer Grössen wird gefunden, wenn man aus dem Unterschiede zwischen dem Quadrate ihrer halben Summe, und ihrem Producte, die Quadratwurzel ausziehet.**

§. 39.

Auch selbst diejenigen Gleichungen, welche unter währender algebraischer Rechnung vorkommen, enthalten öfters die allernützlichsten Lehrsätze. Wir haben in dem gegenwärtigen Exempel eine Probe davon. Denn die Gleichung $\frac{1}{4}aa = b + xx$ giebt den Lehrsatz an die Hand:

Das Quadrat der halben Summe zweyer Grössen, ist gleich dem Producte derselben in einander, und dem Quadrate des halben Unterscheides.

§. 40.

Alles was hier von der gegenwärtigen Aufgabe gesagt worden, enthalten folgende Zeilen:

Die Summe = a   Die halbe Differ. = x
Das Product = b

$$\frac{1}{4}aa - xx = b$$

$$\frac{1}{4}aa = b + xx$$

$$\frac{1}{4}aa - b = xx$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - b\right)} = x$$

§. 41.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen, und der Differentz ihrer Quadrate, die beyden Grössen zu finden.

Auflösung.

1) Benennung.

Es sey die Summe = a,   Die halbe Diff. der Grössen = y
Die Differentz der Quadrate = b,

So ist die eine Grösse = $\frac{1}{2}a + y$.
Und die andere Grösse = $\frac{1}{2}a - y$.

Das

Das Quadrat der ersten wird also gefunden, wenn wir $\frac{1}{2}a + y$ mit sich selbst multipliciren, und das Quadrat der andern, wenn wir $\frac{1}{2}a - y$ mit sich selbst multipliciren. Last uns dieses thun. Denn wenn wir die Quadrate beyder Grössen haben, so wird es uns leicht fallen, die Differenz dieser Grössen zu entdecken. Multipliciret also erstlich $\frac{1}{2}a + y$ durch $\frac{1}{2}a + y$.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}a + y \\ \frac{1}{2}a + y \\ \hline \frac{1}{2}ay + yy \\ \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ay \quad\quad \\ \hline \end{array}$$

So ist das Quadrat der grösten Zahl $\frac{1}{4}aa + ay + yy$

Multipliciret ferner

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}a - y \\ \frac{1}{2}a - y \\ \hline -\frac{1}{2}ay + yy \\ + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ay \quad\quad \\ \hline \end{array}$$

So ist das Quadrat der kleinern Zahl $\frac{1}{4}aa - ay + yy$

Da nun die Differenz zweyer Grössen gefunden wird, wenn man die kleinere von der grösseren subtrahiret: so findet man die Differenz der Quadrate, wenn man von dem Quadrate der grösten Zahl das Quadrat der kleinern abziehet.

Nun

Nun ist das Quadrat der grössern $\frac{1}{4}aa + ay + yy$

das Quadrat der kleinern $\frac{1}{4}aa - ay + yy$

Derowegen ist die Differ. der Quadrate $= 2ay$

2) Gleichung.

Die Differentz der Quadrate ist $= b$ (n. 1.). Die Differentz der Quadrate ist $= 2ay$ (n. 1.). Derowegen ist

$$b = 2ay \text{ (§. 22. Ar.)}$$

3) Ausführung.

$$b = 2ay \text{ (n. 2.)}$$

Hier ist bekanntes 2a mit dem unbekannten y verbunden durch die Multiplication. Man wird es also durch die Division voneinander trennen müssen (§. 18.), und dabey den Satz anbringen: Wenn man gleiches durch gleiches dividiret: so kommen gleiche Quotienten heraus (§. 27. Ar.). Hieraus ist folgendes begreiflich:

$$b = 2ay$$
$$2a = 2a$$
$$\frac{b}{2a} = y$$

Weil wir nun auf der einen Seite lauter bekannte und auf der andern nur eine unbekannte Grösse haben: so ist

ist die Rechnung geendiget (§. 18.), und wir haben unsre Absicht erreicht. Die Regel, welche wir aus der letzten Gleichung ziehen können, ist folgende: **Wenn die Differenz zweyer Quadrate durch das zweifache der halben Summe dividirt wird, so kömmt die halbe Differenz der Grössen heraus.**

§. 42.

Es sey die Differentz der Quadrate $= b = 40$.
Die Summe der beyden Grössen $= a = 10$:
So ist die halbe Differentz derselben $= 40 : (2 \times 10) = 40 : 20 = 2$.
Folgends die grössere Zahl $= \frac{1}{2}a + y$ (§. 20.) $= 5 + 2 = 7$,
und die kleinere $= \frac{1}{2}a - y$ (§. 20.) $= 5 - 2 = 3$.

§. 43.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen, und der Summe ihrer Quadrate, die beyden Grössen zu finden.

Auflösung.

1) **Benennung.**

Es sey die Summe der beyden Grössen $= a$,
die halbe Differentz $= y$,
die Summe ihrer Quadrate $= b$.
So ist die eine Grösse $\frac{1}{2}a + y$ (§. 20.)
und die andere $\frac{1}{2}a - y$

2) Glei-

2) Gleichung.

Weil von der Summe der Quadrate beyder Grössen hier die Rede ist: so wollen wir diese Summe machen. Zu dem Ende werden wir beyde Grössen quadriren, und diese Quadrate zusammen addiren müssen. Nun ist die grössere $\frac{1}{2}a + y$. Man multiplicire also

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}a + y \\ \frac{1}{2}a + y \\ \hline \frac{1}{2}ay + yy \\ \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ay \quad \\ \hline \frac{1}{4}aa + ay + yy \end{array}$$

das Quadr. der grössern.

Man multiplicire ferner die kleinere mit sich selbst.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}a - y \\ \frac{1}{2}a - y \\ \hline -\frac{1}{2}ay + yy \\ + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ay \quad \\ \hline \end{array}$$

$\frac{1}{4}aa - ay + yy$ das Quad. der kleinen.
$\frac{1}{4}aa + ay + yy$ das Quad. der grössern.

$\frac{1}{2}aa \quad + \quad yy$ die Summe der Quad.

Nun ist die Summe der Quadrate $= b$ (n. 1.)

Derowegen ist $b = \frac{1}{2}aa + yy$ (n. 2.)

3) Aus-

3) Ausführung.

$$b = \frac{1}{2}aa + yy \quad (n. 2.)$$
$$\frac{1}{2}aa = \frac{1}{2}aa \quad (§. 20. Ar.)$$
$$b - \frac{1}{2}aa = yy \quad (§. 25. Ar.)$$

Weil wir aber nicht wissen wollen, was yy, sondern was y ist, und y die Quadratwurtzel von yy ist (§. 128. Anmerck.): so werden wir aus yy die Quadratwurtzel ausziehen müssen. Wenn wir aber aus yy die Quadratwurtzel ausziehen: so müssen wir sie auch aus $b - \frac{1}{2}aa$ ausziehen, wenn die Gleichheit erhalten werden soll (§. 18.). Nun ist die Quadratwurtzel von $b - \frac{1}{2}aa = \sqrt{(b - \frac{1}{2}aa)}$ und die Quadratwurtzel von $yy = y$. Derowegen ist $\sqrt{(b - \frac{1}{2}aa)} = y$. W. Z. E.

§. 44.

Folgendes Exempel kan zur Probe dienen: Es sey die Summe zweyer Zahlen = $a = 10$, die Summe ihrer Quadrate = $b = 58$: so ist ihre halbe Differentz = $y = \sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa)} = \sqrt{(29 - 25} = \sqrt{4} = 2$. Nun ist die grössere Zahl = $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$, und die kleinere = $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$. Also sind die beyden Zahlen 7 und 3.
Denn ihre Summe ist = 10,
das Quadrat von 7 = 49,

das Quadrat von 3 = 9,
Derowegen die Summe derer Quadr. = 58.

§. 45.

Ich habe gesagt, daß die Algebra ihre eigenen Kunstgriffe selbsten erfinde. Wir können davon an der unreinen quadratischen Gleichung eine Probe machen. Wir müssen also erst ausmachen, was eine unreine quadratische Gleichung (æquatio quadratica affecta) sey. Zu dem Ende erinnere man sich dessen, was ich in meinen Anmerckungen (§. 141.) erwiesen habe. Ich habe daselbst dargethan, daß das Quadrat einer binomischen Wurtzel aus dem Quadrate des ersten Theils, aus einem doppelten Producte des ersten Theils in den andern, und aus dem Quadrate des andern Theils bestehe. Denn das Quadrat von $a + b$ ist $a^2 + 2ab + b^2$. Nun stelle man sich vor, es sey eine Gleichung vorhanden, die eine Grösse dieser Gleichung würde ein Quadrat einer binomischen Wurtzel seyn, wenn nur nicht das Quadrat des einen Theils noch fehlte: so ist dieses eine unreine quadratische Gleichung (æquatio quadratica affecta). Z. E. Es sey:

$$x = a^2 + 2ab$$

So siehet man wohl, daß die eine Grösse $a^2 + 2ab$ ein vollkommenes Quadrat werden würde, wenn noch das b^2 hinzukäme.

§. 46.

Wenn dergleichen unreine quadratische Gleichung vorkömmt, und sie soll aufgelöset werden, so muß man sie ergäntzen. Und dieses geschiehet folgender gestalt. Wenn $c^2 = a^2 + 2ab$: so ist a^2 das Quadrat des ersten Theils, und folglich die Wurtzel von a^2, das ist a, der erste Theil selbst. Derowegen ist $2a$ der erste Theil zweymahl genommen. Da nun $2ab$ ein Product, aus dem ersten Theile zweymahl genommen, in dem andern Theil ist: so muß b der andere Theil der Wurtzel seyn. Nun fehlt uns noch das Quadrat des andern Theils, um das Quadrat der binomischen Wurtzel vollkommen zu machen, und es kan nicht schwer fallen, dasselbe zu finden, wenn wir nur bedencken, daß b der andere Theil der Wurtzel sey. Denn wenn dieses ist: so ist b^2 das Quadrat des andern Theils, welches noch hinzugesetzt werden muß. Es sey also wie vorhin

$$c^2 = a^2 + 2ab$$

so addiret $b^2 = b^2$ (§. 20. Ar.)

$$c^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ (§. 24. Ar.)}$$

Weil nun gleiches herauskömmt, wenn man aus gleichen Grössen die Quadratwurtzel ausziehet: so ziehe man erstlich die Quadratwurtzel aus $c^2 + b^2$. Diese kan nicht anders angedeutet werden, als durch

$\sqrt{(c^2+b^2)}$. Ferner ziehe man auch aus $a^2+2ab+b^2$ die Quadratwurtzel. Diese ist $a+b$ (§. 141. Anmerck.). Derowegen ist

$$\sqrt{(c^2+b^2)}=a+b$$

§. 47.

Damit man sehe, wie die unreine quadratische Gleichung mit Nutzen gebraucht, und wie dadurch der Weg zur unbekannten Grösse entdeckt werden könne; so wollen wir folgende Gleichung annehmen:

$$x^2+ax=b^2.$$

In dieser Gleichung ist x^2 das Quadrat des andern Theils einer binomischen Wurtzel; ax ist ein Product aus dem ersten Theile 2mahl genommen in den andern. Da nun x der andere Theil ist: so muß a den ersten Theil zweymahl genommen vorstellen. Derowegen ist der erste Theil die Helfte von a das ist $\frac{1}{2}a$. Wenn nun $\frac{1}{2}a$ der erste Theil der Wurtzel ist: so ist das Quadrat des ersten Theils $\frac{1}{4}aa$ oder $\frac{1}{4}a^2$ (§. 154. Anmerck.), und dieses ist es eben, was uns noch fehlt, wenn das Quadrat vollständig gemacht werden soll. Man addire also zu der gegebenen Gleichung

x^2

$$x^2 + ax = b^2$$

(addirt) $\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$

$$\frac{1}{4}a^2 + ax + x^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2 \text{ (§. 24. Ar.)}$$

(Rad. extr.)

$$\frac{1}{2}a + x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$$

(subtrahirt) $a = a$

$$x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} - a \text{ (§. 25. Ar.)}$$

Da wir nun nunmehro auf der einen Seite lauter bekannte, und auf der andern Seite nur eine unbekannte Grösse haben: so ist die unreine quadratische Gleichung vollkommen aufgelöst.

§. 48.

Es müssen eben nicht lauter würckliche Grössen in einer unreinen quadratischen Gleichung seyn, sondern sie kan auch aus verneinenden bestehen. Folgendes Exempel wird es deutlich machen.

Wenn $x^2 - ax = b^2$

so ist $+x^2$ das Quadrat des andern Theils. Folglich $+x$ der andere Theil selbst. $-ax$ ist ein Product aus dem andern Theile in dem ersten 2mahl genommen. Da nun allemahl der eine Factor herauskommen muß, wenn man mit dem andern in das Factum dividiret (§. 137. Anmerck.): so dividire man

$-ax$ durch $+x$.

Wenn man dieses thut: so bekömmt man $-a$ (§. 15.). Derowegen ist $-a$ das Doppelte des ersten Theils. Wird also nicht $-\frac{1}{2}a$ der erste Theil selbsten seyn? Wenn man $-\frac{1}{2}a$ durch $-\frac{1}{2}a$ multiplicirt: so bekömmt man $+\frac{1}{4}a^2$ (§. 68. Ar.). Also ist $+\frac{1}{4}a^2$ das Quadrat des erstern Theils, welches noch addirt werden muß. Dadurch gelanget man zu folgender Auflösung.

$$x^2 - ax = b^2$$
$$\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 \quad \text{(addirt.)}$$
$$\frac{1}{4}a^2 - ax + x^2 = b^2 + \frac{1}{4}a^2 \quad \text{(§. 24. Ar.)}$$
$$x - \frac{1}{2}a = \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)} \quad \text{(Rad. extrah.)}$$
$$+\frac{1}{2}a = +\frac{1}{2}a \quad \text{(addirt.)}$$
$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)} \quad \text{(§. 24. Ar.)}$$

Will man die Probe machen, ob $x - \frac{1}{2}a$ die Quadratwurtzel von $\frac{1}{4}a^2 - ax + x^2$ sey: so darf man nur $x - \frac{1}{2}a$ mit sich selbst multipliciren.

$$\begin{array}{r} x - \frac{1}{2}a \\ x - \frac{1}{2}a \\ \hline -\frac{1}{2}ax + \frac{1}{4}a^2 \\ +x^2 - \frac{1}{2}ax \quad \\ \hline x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 \end{array}$$

§. 49.

§. 49.

Damit wir den Gebrauch der unreinen quadratischen Gleichungen desto deutlicher einsehen: so wollen wir uns derselben bedienen, eine Aufgabe aufzulösen, welche wir oben auf eine andere Art aufgelöst haben.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Summe zweyer Zahlen, und dem Producte einer Zahl in die andere, die Zahlen selber zu finden.

Auflösung.

Es sey die Summe $= a$ die grosse Zahl $= y$
das Product $= b$ die kleine Zahl $= x$

So ist

$$a = y + x \qquad b = xy$$
$$\text{(subtrah.)}\ y = y \qquad y = y\ \text{(divid.)}$$
$$a - y = x \qquad b : y = x$$

$$a - y = b : y \quad (\S.\ 22.\ \text{Ar.})$$
$$-y = -y \quad (\text{multiplic.})$$
$$(\text{æquat. quadr.})\ -ay + y^2 = -\frac{by}{y} = -b\ (\S.\ 15.)$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2\ (\text{add.})$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 - ay + y^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - b$$
$$(\text{Rad. extrah.})\ \tfrac{1}{2}a - y = \surd(\tfrac{1}{4}a^2 - b)$$
$$\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}a\ (\text{addirt.})$$
$$y = \surd(\tfrac{1}{4}a^2 - b) + \tfrac{1}{2}a$$

§. 50.

Probe.

Es sey $a = 14$, $b = 48$: so ist $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)} = \sqrt{(49 - 48)} = 1$. Ferner $\frac{1}{2}a = 7$. Also $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)} + \frac{1}{2}a = 1 + 7 = 8 = y$ (§. 49.).

Wollte man aus der letzten Gleichung eine Regel machen, so würde sie nach der algebraischen Grammatica folgender gestalt lauten:

Wenn man aus der Summe und dem Producte zweyer Zahlen die Zahlen selber finden will: so muß man von dem Quadrate der halben Summe das Product subtrahiren, aus der gefundenen Zahl die Quadratwurtzel ausziehen, und die halbe Summe darzu addiren, so bekömmt man die gröste von denen beyden Zahlen, welche, wenn sie von der Summe abgezogen wird, die kleine übrig läst.

§. 51.

Hat man Lust, eine kleine mathematische Zauberey anzustellen: so kan solches durch die gegenwärtige und andere Aufgaben von dieser Art gar leichte geschehen. Man läst z. E. iemanden zwey Zahlen in die Gedancken nehmen, und läst sich von ihm nur ihre Summe und ihr Product sagen, so kan man

man wissen, was er vor Zahlen in den Gedancken gehabt hat.

§. 52.

Wir sehen nun immer mehr und mehr, daß ein Algebraiste die Wahrheit in seiner Gewalt habe, und daß er weiter nichts als Zeit und Papier nöthig habe, um sie zu entdecken. Solchergestalt ist er geschickt, seine Wissenschaft beständig zu bereichern, indem er immerfort neue Entdeckungen darinnen machen kan. Aber dieses ist auch eben mit eine Ursache, warum man die mathematischen Erfindungen nicht so hoch als andere zu schätzen gewohnt ist. Denn die Menschen beurtheilen den Werth der Dinge aus ihrer Seltsamkeit, sie haben sich also einen Maasstab verfertiget, welcher sehr unrichtig ist. Denn wenn wir die Welt mit unpartheyischen Augen betrachten, so werden wir finden, daß die gemeinsten Dinge öfters die alleredelsten sind. Was ist nützlicher und unentbehrlicher, als das Eisen, und gleichwol giebt man einer Perle und orientalischen Demante den Vorzug? Will man sich auf die schönen Farben berufen; diese besitzen die böhmischen Demante auch, und wenn man ia behaupten wollte, daß sie in den orientalischen noch schöner wären: so würde dieser Unterscheid doch nimmermehr so viel ausmachen, daß man seinethalben einen kleinen orientalischen Demant einer grossen Menge

böhmischer Demante vorziehen sollte. Man thut es aber doch, und warum? Weil der erste weit her ist, und seltener gefunden wird. Denn so ist es:

> Der Wahn macht falsche Güter groß,
> Damit wir was zu klagen haben.

Gewiß, es ist in einigen Stücken mit den Menschen recht lächerlich beschaffen, und wer weiß, was uns die heydnischen Poeten mit ihrer Fabel haben sagen wollen; wenn sie erzehlen, es hätten sich die Götter einen Rausch getruncken gehabt, als sie den Menschen gemacht hätten, und da sie ihn betrachtet, nachdem sie wieder nüchtern geworden; so hätten sie sich des Lachens nicht darüber enthalten können.

§. 53.

Aufgabe.

Aus dem gegebenen Producte zweyer Grössen und ihrer Differentz die Grössen selber zu finden.

Auflösung.

Es sey das Product $= a$
Die Differentz $= b$

Die gröste Grösse $= x$
Die andere $= y$

So

So ist

(per hypoth.) $a = xy$ (per hypoth.) $b = x - y$
(dividirt.) $y = y$ (addirt.) $y = y$

(§. 27. Ar.) $a : y = x$ (§. 24. Ar.) $b + y = x$

Derowegen $a : y = b + y$ (§. 22. Ar.)
$y = y$ (multiplicirt.)

(æq. quadr. aff.) $a = by + y^2$ (§. 45.)
$\frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^2$ (§. 46.)

$a + \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^2 + by + y^2$ (§. 24. Ar.)

(Rad. extr.) $\sqrt{(a + \frac{1}{4}b^2)} = \frac{1}{2}b + y$
$\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b$ (subtrahirt.)

$\sqrt{(a + \frac{1}{4}b^2)} - \frac{1}{2}b = y$ (§. 25. Ar.)

Das ist: Wenn man zu dem Producte zweyer Zahlen das Quadrat ihrer halben Differentz addiret, aus der Summe die Quadratwurtzel auszieht, und die halbe Differentz davon subtrahirt, so kömmt die gröste von ihnen heraus. Es bleibet demnach die kleinere übrig, wenn man von der grössern die Differentz abzieht.

§. 54.

Erklärung.

Drey oder vier Grössen sind harmonisch proportional, wenn im ersten Falle der Unterschied der ersten und andern sich verhält zu dem Unterscheide der

andern und dritten, wie die erste zu der dritten; im andern Falle aber der Unterscheid der ersten und anderen zu dem Unterscheide der dritten und vierten wie die erste zu der vierten. Dergleichen Zahlen sind 2, 3 und 6. Denn die Differentz zwischen 2 und 3 = 1, die Differentz zwischen 3 und 6 = 3, und es verhält sich 1 zu 3 wie die erste Zahl 2 zu der letzten 6. Man hat dieses darum eine harmonische Proportion genannt, weil man bemerckt hat, daß die Tone in der Music, welche eine angenehme Harmonie zusammen machen, dergleichen Verhältniß haben. Am allerbesten kan man sie bey einem Würffel behalten. An demselben finden wir Puncte, Linien und Flächen, und die Anzahl derselben macht eine harmonische Proportion aus. Denn ein Würffel hat 6 Flächen, 8 Puncte oder Ecken, und 12 Linien. 6, 8 und 12 aber sind in einer harmonischen Proportion. Denn es ist die Differentz des ersten und andern Gliedes = 2, die Differentz des andern und dritten ist = 4: also verhält sich die Differentz des ersten und andern Gliedes = 2, zu der Differentz des andern und dritten = 4, wie das erste = 6 zu dem letzten Gliede = 12. Wenn die Glieder vervielfältiget werden: so entstehet eine harmonische Progreßion.

§. 55.

§. 55.

Aufgabe.

Zu zwey gegebenen Grössen die dritte harmonische Proportionalgrösse zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste $= a$ die dritte $= x$
die andere $= b$

So ist

$a - b : b - x = a : x$ (§. 54.)

$ax - bx = ab - ax$ (§. 81. Ar.)
$ax = ax$ (addirt.)

$2ax - bx = ab$ (§. 24. Ar.)
$2a - b = 2a - b$ (dividirt.)

$$x = \frac{ab}{2a - b}$$ (§. 27. Ar.)

Es sey $a = 10$, $b = 16$; so ist $x = 10 \times 16 : 20 - 16 = 160 : 4 = 40$.

§. 56.

Aufgabe.

Zu drey gegebenen Grössen die vierte harmonische Proportionalgrösse zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste $= a$ die vierte $= x$
die andere $= b$
die dritte $= c$

So

So ist

$a - b : c - x = a : x$ (§. 54.)

$ax - bx = ac - ax$ (§. 81. Ar.)

$ax = ax$ (addirt.)

$2ax - bx = ac$ (§. 24. Ar.)

$2a - b = 2a - b$ (dividirt.)

$x = \frac{ac}{2a - b}$ (§. 27. Ar.)

W. Z. E.

Probe.

Wir wollen setzen, es sey wie bey dem Würffel (§. 54.) $a = 6$, $b = 8$, $c = 12$: so ist $x = \frac{ac}{2a - b} = \frac{6 \times 12}{(2 \times 6) - 8} = \frac{72}{12 - 8} = \frac{72}{4} = 18$.

Denn es ist $2 : 6 = 6 : 18$.

§. 57.

Aufgabe.

Zwischen zwey gegebenen Grössen die mittlere harmonische Proportional-grösse zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste $= a$ die andere $= x$
die dritte $= b$

So

So ist

$a - x : x - b = a : b$ (§. 54.)

$ab - bx = ax - ab$ (§. 81. A.)
$bx = bx$ (addiret.)

$ab = ax + bx - ab$
$ab = ab$

$2ab = ax + bx$
$a + b = a + b$

$$\frac{2ab}{a + b} = x.$$

§. 58.

Wenn man setzt: $a - b : b - x = a : x$; so sind dieses rationes majoris inæqualitatis (§. 95. Anmerck.). Sollen es rationes minoris inæqualitatis vorstellen: so ist die Proportion: $b - a : x - b = a : x$ (§. 95. Anm.) Es kömmt aber in beyden Fällen einerley Regel heraus.

§. 59.

Newton, dieser unvergleichliche Newton hat eine Regel erfunden, vermittelst welcher man eine iede Grösse zu einer ieden Dignität erheben, und aus einer ieden Grösse eine iede Wurtzel ausziehen kan. Sie ist so schön, und lehrt uns die Kunst zu abstrahiren auf eine so deutliche und reitzende Art, daß ich glaube, meine Leser würden nur halb vergnügt seyn, wenn sie hier keine Erklärung davon antröfen. Sie werden

den darinnen das Geheimniß erblicken, eine in der That unendliche Menge der Begriffe mit ohngefehr sechs Buchstaben auszudrücken. Die ontologischen Abstractionen, dadurch die Begriffe so subtil gemacht werden, daß sie sich dadurch nicht selten in ein würckliches Nichts verlieren, kommen dagegen in keine Vergleichung, indem man aus ihnen sehr selten die Bestimmungen mehr eingeschränckter Begriffe, und fast niemals die Merckmale eines eintzelnen Dinges herleiten kan. Gantz anders ist es mit diesen geheimnißvollen Buchstaben beschaffen, durch deren Erblickung man einen Begriff von allen noch nöthigen Bestimmungen bekömmt, welche erfordert werden, wenn man die allgemeine Regel auf einen besondern Fall appliciren soll. Um aber alle unnöthige Weitläuftigkeit dabey zu vermeiden, so lege ich alles dasjenige zum Grunde, was ich in meinen Anmerckungen über die Rechenkunst im 4. Capitel, welches von denen Dignitäten oder Potentzen handelt, gesagt und erwiesen habe.

§. 60.

Das Quadrat von $a + b$ ist $a^2 + 2ab + b^2$ (§. 14. Anmerck.). Das Quadrat von $a + b + c = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$ (§. 149. Anmerck.). Wenn man c als den einen und $a + b$ als den andern Theil der Wurtzel betrachtet: so kan man das Quadrat von $a + b + c$ noch auf eine andere Art fin-

finden. Denn weil das Quadrat einer binomischen Wurtzel aus dem Quadrate des ersten Theils, aus einem doppelten Producte des ersten Theils in den andern und aus dem Quadrate des andern Theils bestehet (§. 141. Anmerck.): so ist $(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$. Nun ist $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (§. 141. Anmerck.). Derowegen ist $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2$ (§. 15. Anmerck.)

§. 61.

Eben so lassen sich alle Quadrate, welche multinomische Wurtzeln haben, nach dem Quadrate der binomischen beurtheilen. Man wollte z. E. das Quadrat von $a+b+c+d$ wissen: so sieht man $a+b+c$ als den einen, und d als den andern Theil der Wurtzel an: so ist $(a+b+c+d)^2 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2$ (§. 141. Anmerck.). Nun ist $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2$. (§. 60.). Man kan daher den einen Werth für den andern setzen (§. 15. Anmerck.), so bekömmt man: $(a+b+c+d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2$.

§. 62.

Man soll das Quadrat von $(a+b+c\ d+e)$ finden. Setzet $(a+b+c+d)$ als den einen, und e als den andern Theil an: so ist $(a+b+c+d+e)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2 + 2(a+b+c+d)e + e^2$ (§. 61.).

§. 63.

§. 63.

Dieses wird vollkommen hinreichend seyn, folgende Tabelle zu verstehen.

$1a$	$1b$									
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$								
$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$							
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$						
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	$1b^5$					
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$				
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$			
$1a^8$	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	$8ab^7$	$1b^8$		
$1a^9$	$9a^8b$	$36a^7b^2$	$84a^6b^3$	$126a^5b^4$	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36a^2b^7$	$9ab^8$	$1b^9$	
$1a^{10}$	$10a^9b$	$45a^8b^2$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45a^2b^8$	$10ab^9$	$1b^{10}$

§. 64.

Aus dieser Tabelle erhellet, daß eine jede Dignität aus verschiedenen Producten zusammengesetzt sey, und daß diese Producte durch verschiedene Zahlen multiplicirt werden. Es entstehen aber diese Producte, wenn man jeden Theil der Wurtzel zu allen übrigen Dignitäten als die gegeben ist, erhöhet, und sie hernach verkehrt in einander multiplicirt. Ein Exempel wird die gantze Sache deutlicher machen. Setzet, man soll sagen, was die sechste Dignität von $a+b$ wäre: so könnte man zwar $a+b$ zur sechsten Dignität erheben (§. 126. Anmerck.), aber last uns versuchen, ob wir es errathen können, ohne dieses zu thun. Man schreibe also alle Dignitäten von a bis auf die sechste, und hernachmals alle Dignitäten von b bis auf die sechste umgekehrt darunter, und multiplicire es mit einander.

$$a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a^1 + 1$$
$$1 + b^1 + b^2 + b^3 + b^4 + b^5 + b^6$$

$$a^6 + a^5b^1 + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + a^1b^5 + b^6$$

Wollte man die zehente Dignität von $a+b$ wissen; so schreibe man:

$$a^{10} + a^9 + a^8 + a^7 + a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a^1 + 1$$
$$1 + b^1 + b^2 + b^3 + b^4 + b^5 + b^6 + b^7 + b^8 + b^9 + b^{10}$$

$$1a^{10} + a^9b + a^8b^2 + a^7b^3 + a^6b^4 + a^5b^5 + a^4b^6 + a^3b^7 + a^2b^8 + a^1b^9 + b^{10}$$

Dieses sind alle Producte, welche in der zehnten Dignität vorkommen, aber es fehlen noch dieienigen Zahlen, so diese Producte multipliciren, wie man durch Vergleichung der vorher angeführten Tabelle ersehen kan, und welche Zahlen Untzen genennet werden. Wir wollen bald sehen, wie diese Untzen zu finden sind. Ehe wir aber dieses thun, wollen wir vorher von den Producten der Dignitäten einen allgemeinen Ausdruck suchen. Man siehet aus der Tabelle, daß der Anfang der vierten Dignität sey a^4, der fünften a^5, der sechsten a^6 u. s. w. Da wir nun keinen Grund haben, eine Dignität vor der andern zu erwählen, sondern dieses nur besondere Begriffe sind, welche unter einem allgemeinern enthalten sind: so wollen wir den Exponenten auch nicht 4, 5 oder 6 nennen, sondern er soll m heissen, indem unter diesen m alle mögliche Zahlen verstanden, und dafür gesetzt werden können. Weil ferner die Dignitäten von a immer niedriger, und von b grösser gesetzt werden: so würden folgende Producte herauskommen:

(multipl.)

$$a^m + a^{m-1} + a^{m-2} + a^{m-3} + a^{m-4} + a^{m-5} + a^{m-6}$$

etc. in infinitum.

$$1 + b^1 + b^2 + b^3 + b^4 + b^5 + b^6 \text{ etc.}$$

$$a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + a^{m-4}b^4 +$$
$$a^{m-5}b^5 + a^{m-6}b^6 \text{ etc.}$$

Neh-

Nehmet an: m sey = 6: so ist m — 1 = 6 — 1 = 5, und m — 2 = 6 — 2 = 4 u. s. w. also käme die sechste Dignität von a + b heraus bis auf die Unzen.

§. 65.

Lasset uns nun sehen, wie wir auch die Unzen finden können. Dieses sind diejenigen Zahlen, welche in der Tabelle mit a und b multipliciret sind. Wir wollen sie von der ersten bis auf die siebente Dignität aus der Tabelle hierher setzen.

1 + 1
1 + 2 + 1
1 + 3 + 3 + 1
1 + 4 + 6 + 4 + 1
1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1
1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1
1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1.

Diese so unordentlich und doch ordentliche Zahlen können folgender gestalt gefunden werden. Man schreibet die Exponenten der Dignitäten die in einander multiplicirt werden, unter einander, und nimmt den Bruch aus den zwey ersten Zahlen für die Unze des andern Gliedes, den Bruch aus Multiplication der beyden ersten obern und untern Zahlen zur Unze des dritten Gliedes an, u. s. w. Z. E. Wir sollen die Unzen für die sechste Dignität finden, so setzen wir

erstlich alle Dignitäten von a nach der Reihe hin, und darunter alle Dignitäten von b.

6. 5. 4. 3. 2. 1.
1. 2. 3. 4. 5. 6.

Alsdenn ist

$\frac{6}{1} = 6$ die Unze des andern Gliedes,

$\frac{6 \times 5}{1 \times 2} = \frac{30}{2} = 15$ die Unze des dritten,

$\frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} = \frac{120}{6} = 20$ die U. des 4ten,

$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{360}{24} = 15$ des 5ten,

$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{720}{120} = 6$ d. 6ten,

$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = \frac{720}{720} = 1$
die Unze des letzten Gliedes.

Wenn man nun diese Unzen vor die vorher gefundene Producte setzet: so hat man alles, was zu wissen nöthig ist, wenn man sagen soll, was die sechste Dignität von $a + b$ sey. Denn die Producte sind (§. 64.):

a^6

(multiplicirt)

$a^6 + a^5b^1 + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + a^1b^5 + b^6$

d. Unz. $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1$

so ist $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$ die sechste Dignität.

§. 66.

Die Unzen der vierten Dignität sind $1 =$ Unze des ersten Gliedes.

$\frac{4}{1} = 4$ Unze des andern Gliedes.

$\frac{4 \times 3}{1 \times 2} = \frac{12}{2} = 6$ Unze des dritten,

$\frac{4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3} = \frac{24}{6} = 4$ Unze des vierten

$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{24}{24} = 1$ U. des letzten Gl.

Die Producte der vierten Dignität sind:

$a^4 + a^3b^1 + a^2b^2 + ab^3 + b^4$

Unzen $1 + 4 + 6 + 4 + 1$

Also die 4te Dig. $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

§. 67.

Wenn man die Unzen der determinirten Dignitäten zu finden weiß: so kan man auch

 die

die Unzen einer Dignität, deren Exponente undeterminirt ist, das ist, aller Dignitäten überhaupt bestimmen. Es sey der Exponente $= m$. Weil wir, wie ich schon oben angemerckt habe, nicht einen gewissen Exponenten, als die andere, dritte, vierte Dignität, wissen wollen; sondern einen Exponenten, welcher auf alles passet, und dafür alle mögliche Exponenten gesetzt werden können. Wenn also der Exponente $= m$: so findet man die Unzen folgendergestalt (§. 65.):

Exponent. $m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m-3 \,.\, m-4 \,.\, m-5$ in infinitum.
$\quad 1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5. \quad 6$

$\frac{m}{1}$ Unze des andern Gliedes

$\frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2}$ Unze des dritten

$\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ Unze des vierten

$\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m-3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$ Unze des fünften

$\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m-3 \,.\, m-4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}$ des sechsten

m.

$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6}$ Untze des 7ten ∞ (§. 18. Anmerck.)

§. 68.

Weil die Untzen mit den Producten multiplicirt werden müssen (§. 64.): so bekommen wir die Dignität m von a + b, wenn wir die oben (§. 64.) gefundenen Producte von a + b mit denen ietzo gefundenen Untzen (§. 67.) multipliciren. Auf diese Weise finden wir $(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} . a^{m-1}b$

$+ \frac{m.m-1}{1.2} . a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} . a^{m-3}b^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} . a^{m-4}b^4$

$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5} . a^{m-5}b^5$

$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6}$

$a^{m-6}b^6$ etc.

Der Punct ist das Multiplicationszeichen (§. 53. Anmerck.).

§. 69.

Es sey m = 3: so finden wir die dritte Dignität von a + b vermöge des vorhergehenden (§. 68.), wenn wir an statt m eine 3 setzen, folgendergestallt:

a^3

$+ \frac{3}{1} \cdot a^{3-1}b = 3a^2b$

$+ \frac{3 \cdot (3-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{3-2}b^2 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} a^1b^2 = 3ab^2$

$+ \frac{3 \cdot (3-1) \cdot (3-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{3-3}b^3 = \frac{6}{6} a^0b^3 =$

$1b^3 = b^3$: Denn a^0 ist so viel als nichts: weil eine jede Zahl zum wenigsten in der ersten Dignität ist. Fahren wir weiter fort: so finden wir das folgende Glied

$+ \frac{3 \cdot (3-1) \cdot (3-2) \cdot (3-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{3-4}b^4 = \frac{3 \cdot 0}{24}$

$= a^{3-4}b^4 = \frac{0}{24} \cdot a^{3-4}b^4 = 0 \cdot a^{-1}b^4 = 0.$

Denn wenn eine Zahl durch o multiplicirt wird, so ist das Product = o. Weil nichts etliche mahl genommen, gerade so viel als nichts ist.

§. 70.

Hieraus sehen wir, wie eine undeterminirte unendliche Progreßion endlich werden könne, wenn sie durch genauere Bestimmungen eingeschränckt wird. Denn wenn wir die vorher (§. 69.) gefundenen Glieder der dritten Dignität zusammen nehmen: so bekommen wir folgenden Ausdruck:

a^3

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, wie wir ihn auf andere Art gefunden haben (§. 162. Anmerck.). Wir wollen um mehrerer Deutlichkeit willen noch einen Versuch thun, und die vierte Dignität von $a + b$ suchen, so ist $m = 4$, und wir bekommen:

$$a^m = a^4$$

$$+ \frac{m}{1} a^{m-1} b^1 = \frac{4}{1} a^3 b^1 = 4a^3b$$

$$+ \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} a^2 b^2 = \frac{12}{2} a^2 b^2$$
$$= 6a^2b^2$$

$$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 = \frac{24}{6} a^1 b^3 = 4ab^3$$

$$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4 = \frac{24}{24}$$
$$a^0 b^4 = 1b^4 = b^4$$

$$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{m-5} b^5 =$$
$$\frac{24 \cdot 0 \cdot}{120} a^{-1} b^5 = 0 \cdot a^{-1} b^5 = 0$$

Derowegen ist die vierte Dignität von $a + b$ $= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ (§. 171. Anmerck.).

§. 71.

Es ist die andere Dignität von 2 oder $2^2 = 4$

Die dritte, oder $2^3 = 8$

Die vierte $= 2^4 = 16$

Die fünfte $= 2^5 = 32$

Die sechste $= 2^6 = 64$ u. s. w. (§. 126. Anmerck.). 2 ist die Wurtzel aller dieser Dignitäten. Wenn man nun eine Dignität durch die Wurtzel dividiret: so kömmt die nächst kleinere Dignität derselbigen Wurtzel heraus.

Z. E. man dividire 8, welches die dritte Dignität von 2 ist, durch die Wurtzel 2: so kömmt 4 heraus, und dieses ist die andere Dignität von 2. Man dividire 64 oder die sechste Dignität von 2 durch die Wurtzel = 2: so bekömmt man 32, welches die fünfte, und also die um einen Grad niedrigere Dignität von 2 ist. Und so ist es auch mit allen übrigen Zahlen beschaffen. Die Ursache ist nicht schwer zu errathen, sondern läst sich aus der Art und Weise, wie die Dignitäten entstehen, vollkommen herleiten. Denn wenn ich z. E. die sechste Dignität machen will, so muß ich die fünfte mit der ersten multipliciren (§. 126. Anm.). Es ist also die sechste Dignität ein Product aus der fünften in die erste, dessen beyde Factores die erste und fünfte Dignität sind. Da nun nichts gewisser ist, als daß der ei-

ne

ne Factor herauskommen müsse, wenn man mit dem andern Factore in das Factum dividirt (§. 137. Anmerck.): so muß auch die fünfte Dignität herauskommen, wenn man mit der ersten in die sechste dividiret, oder überhaupt davon zu sprechen, wenn man eine Dignität durch die erste dividirt: so kömmt eine Dignität heraus, deren Exponente um 1 kleiner ist, als der Exponente der vorhergehenden. Derowegen ist

$$a^m : a = a^{m-1}$$
$$a^2 : a = a$$
$$a^3 : a = a^2$$
$$a^4 : a = a^3$$
$$a^5 : a = a^4$$
$$a^6 : a = a^5. \quad \text{etc.}$$

§. 72.

Die sechste Dignität von 2 ist = 64. Man dividire 64 durch die andere Dignität von 2 = 4: so kömmt 16 heraus, welches die vierte Dignität von 2, und also eine Dignität ist, deren Exponente um 2 kleiner ist, als der Exponente der vorhergehenden. Wenn man also eine Dignität durch das Quadrat ihrer Wurzel, oder welches gleich viel ist, durch die andere Dignität dividirt: so muß eine Dignität herauskommen, deren Exponente um 2 kleiner

ner ist als der vorhergehende. Derowegen ist $a^m : a^2 = a^{m-2}$.

§. 73.

Die sechste Dignität von 2 ist = 64. Man dividire sie durch die dritte Dignität von 2 = 8: so kömmt die dritte Dignität von 2 = 8 heraus, deren Exponente um 3 kleiner ist, als der Exponente der sechsten Dignität. Das heist: **Wenn man eine Dignität durch die dritte Dignität der Wurzel dividirt, so kömmt eine Dignität heraus, deren Exponente um 3 kleiner ist, als der Exponente derjenigen Dignität, in welche man dividirt hatte.** Derowegen ist $a^m : a^3 = a^{m-3}$.

§. 74.

Weil $a^m : a^1 = a^{m-1}$ (§. 71.)

und $a^m : a^2 = a^{m-2}$ (§. 72.)

und $a^m : a^3 = a^{m-3}$ (§. 73.)

so ist die Folge leicht einzusehen, daß

$a^m : a^4 = a^{m-4}$

und $a^m : a^5 = a^{m-5}$

und $a^m : a^6 = a^{m-6}$ u. s. w.

Wenn aber dieses ist: so hat man die Freyheit, einen Ausdruck in die Stelle des andern zu setzen; indem gleiche Sachen der Grösse ohnbeschadet iederzeit vor einander gesetzt werden können (§. 15. Anmerck.).

Man

Man setze also in den vorigen allgemeinen Ausdrucke einer Dignität (§. 68.)

$a^m : a$ an statt a^{m-1}
$a^m : a^2$ an statt a^{m-2}
$a^m : a^3$ an statt a^{m-3}
$a^m : a^4$ an statt a^{m-4}
$a^m : a^5$ an statt a^{m-5}
$a^m : a^6$ an statt a^{m-6} u. s. w.

so verwandelt sich der gegebene allgemeine Ausdruck der Dignitäten (§. 68.) in folgende Gestalt:

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m\,a^m.\,b}{1\;a} + \frac{m\,.\,m-1\,.\,a^m b^2}{1\;.\;2\;a^2}$$

$$+ \frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\frac{a^m b^3}{a^3}$$

$$+ \frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2\,.\,m-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,.\,\frac{a^m b^4}{a^4}$$

$$+ \frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2\,.\,m-3\,.\,m-4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\,.\,\frac{a^m b^5}{a^5}$$

$$+ \frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2\,.\,m-3\,.\,m-4\,.\,m-5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}\,.$$

$$\frac{a^m b^6}{a^6} \;\infty$$

§. 75.

§. 75.

Wenn wir dieses betrachten: so werden wir wahrnehmen, daß in allen Gliedern befindlich sey a und $\frac{b}{a}$. Man wird ferner befinden, daß das erste Glied in dem andern, das andere in dem dritten, das dritte in dem vierten, das vierte in dem fünften u. s. w. befindlich sey, und daß nur immer noch etwas hinzugesetzt werde. Es sey also (per Hypothesin) $a = P$ und $b : a = Q$, das erste Glied $= A$, das andere $= B$, das dritte $= C$, das vierte $= D$, das fünfte $= E$, u. s. w.

§. 76.

Es ist $(a + b)^m = a + (\frac{b}{a} \cdot a)$ (§. 63.)

Da nun $a = P$, und $b = Q$: so ist $(a + b)^m = (P + PQ)^m$ (§. 75.).

Derowegen ist ferner $(P + PQ)^m = P^m$

$$+ \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ + \frac{m-2}{3} CQ$$

$$+ \frac{m-3}{4} DQ + \frac{m-4}{5} EQ + \frac{m-5}{6}$$

$$FQ + \frac{m-6}{7} GQ + \frac{m-7}{6} HQ \text{ u. s. w.}$$

§. 77.

§. 77.

Wenn ein Algebraiste von dieser Regel nur so viel weiß $P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2}$ BQ: so kan er vermöge des ihm beywohnenden prophetischen Geistes schon alles übrige errathen.

Diese wenige Buchstaben sind also hinreichend, sich von aller möglichen Zahlen möglichen Dignitäten einen deutlichen Begriff zu machen. Es ist aber die Menge der Zahlen so wol als ihrer Dignitäten in der That unendlich groß, ich sage in der That unendlich groß, weil ich es entweder für eine grosse Einfalt oder übertriebene Weisheit halte, wenn man uns weiß machen will, daß dergleichen Progreßionen in der That endlich wären, und nur darum unendlich genennet würden, weil man das Ende davon nicht absehen könte. Eine Ausflucht, dadurch man einen nicht allzuscharfsinnigen Weltweisen betriegen kan, aber keinen Mathematicker.

§. 78.

Ohneracht ich glauben sollte, daß alles klar wäre: so will ich doch noch eine Erläuterung beyfügen. Die gefundene Regel ist $(P + PQ)^m = P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ +$

m—2

$\frac{m-2}{3}CQ + \frac{m-3}{4}DQ + \frac{m-4}{5}EQ + \frac{m-5}{6}$ FQ u. s. w. Nun ist ferner $a = P$ und $b:a = Q$, das erste Glied $= A$, das andere $= B$, das dritte $= C$, das vierte $= D$, das fünfte $= E$ u. s. w.

Derowegen ist $P^m = a^m$

$$\frac{m}{1}AQ = \frac{m}{1}\frac{a^m b}{a} = \frac{m}{1}a^{m-1}b \text{ (§. 74.)}.$$

$$\frac{m-1}{2}BQ = \frac{m-1}{2}\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{a^{m-1}b}{a}\cdot b = \frac{m.m-1}{1\,.\,2}\,\frac{a^{m-1}b}{a}\cdot\frac{b}{a} = \frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\cdot\frac{a^m b^2}{a^2}$$

$$= \frac{m.m-1}{1\,.\,2}\cdot a^{m-2}b^2 \text{ (§. 74.)}.$$

$$\frac{m-2}{3}CQ = \frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{a^{m-2}b^2.b}{a}$$

$$= \frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{m-3}b^3$$

$$\frac{m-3}{4}DQ = \frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2\,.\,m-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\frac{a^{m-3}b^3.b}{a} = \frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2\,.\,m-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,a^{m-4}b^4 \text{ (§. 74)}.$$

m—4

$$\frac{m-4}{5} EQ = \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5}$$

$$\frac{a^{m-4}b^4 . b}{a} = \frac{m.m-1.m-2.m.-3}{1.2.3.4}$$

$\frac{m-4}{.5}$. $a^{m-5}b^5$. u. s. w.

Denn $\frac{a^{m-4}}{a} = a^{m-5}$ (§. 73.) und $b^4 \times b = b^5$ (§. 129. Anmerck.).

§. 79.

Folgendes kan zur Probe dienen: Es sey $a = 10$, $b = 8$, $m = 4$: so wird die 4te Dignität von 18 folgendergestalt gefunden. $P = 10$, $Q = 8 : 10 = 4 : 5$, folgends $P^m = 10^4 = 10000 = A$

$mAQ = 4 . 10000 . \frac{4}{5} = 32000 = B$

$\frac{m-1}{2} BQ = \frac{3}{2} . 32000 . \frac{4}{5} = 38400 = C$

$\frac{m-2}{3} CQ = \frac{2}{3} . 38400 . \frac{4}{5} = 20480 = D$

$\frac{m-3}{4} DQ = \frac{1}{4} . 20480 \frac{4}{5} . = 4096 = E$

$\frac{m-4}{5} EQ = 0 . 4096 . \frac{4}{5} = 0 = F$

10000 = A
32000 = B
38400 = C
20480 = D
4096 = E

104976 vierte Dignität von 18.

§. 80.

Ich habe oben zweyer Beschuldigungen gedacht, um welcher willen die meisten Gelehrten einen Abscheu vor der Algebra haben. Die erste besteht darinnen, daß sie allzuschwer sey, und ein ausserordentliches Kopfbrechen erfordere; und die andere ist, daß dergleichen Betrachtungen keinen Nutzen hätten. Ich gestehe es, wenn beyde Einwürfe wahr wären; so wird es sehr vernünftig seyn, mit der Algebra sich gar nicht einzulassen, und vor einer Sache zu fliehen, von welcher man weder Nutzen noch Vergnügen zu erwarten hätte. In Wahrheit, das menschliche Leben ist viel zu kurtz, unsere Zeit viel zu edel, und die Anzahl der Sachen, um welche man sich zu bekümmern hat, viel zu groß, als daß man alle seine Bemühung nur dahin richten sollte, um ein mühsames Nichts zu erhalten. Nein, es giebt fünf Sachen, welche so vortrefflich sind, daß sie ein Weltweiser nothwendig als die Absicht seiner Bemühungen ansehen muß. Dieses ist Verstand, Tugend, Gesundheit und ein langes und vergnüg-

gnügtes Leben. Warum soll also ein x+a der Hencker seyn, welcher ihn zu seinem Tode begleitet? Dieses Urtheil ist viel zu vernünftig, als daß ich ihm nicht Beyfall geben sollte; wenn man nur erst die beyden Kleinigkeiten ausgemacht hätte, daß die Algebra so ungeheuer schwer wäre, und gar keinen Nutzen hätte. Aber das ist es eben, woran ich zweifle. Denn daß die Algebra Anfängern so schwer vorkömmt, davon habe ich die Ursachen gezeiget, welche darinnen bestehen: daß man hier gewohnt ist, sehr viele Schlüsse auszulassen, nichts zu citiren, und sich überhaupt nirgends deutlich zu erklären. Denn wenn man dieses thäte: so fielen alle Schwierigkeiten hinweg, wovon die vorhergehenden Blätter einen deutlichen Beweiß geben, welche so eingerichtet sind, daß sich allemal die Auflösung einer Aufgabe mit der leichtesten Mühe in eine Reihe förmlicher Vernunftschlüsse verwandeln läst. Denn wo sollte nun wol eine Schwierigkeit stecken? gewiß, wem diese Erläuterungen nicht klar genug sind, der darf nur die Hoffnung fahren lassen, ein anderer Newton zu werden. Es können also diese Blätter einen Probierstein abgeben, daran man sehen kan, ob man zum Nachdencken geschickt ist, oder ob man sich nur um solche Sachen zu bekümmern habe, welche ohne Verstand müssen auswendig

dig gelernet werden, und doch hinreichend sind, einen dummen und faulen Menschen, welcher mehr als andere seyn will, seinen Lebensunterhalt zu verschaffen. So gewiß ich mir einbilde, den Einwurf, daß die Algebra allzuschwer sey, gehoben zu haben: so kan ich es doch den Mathematickverständigen nicht verdencken, daß sie die Algebra nicht auf eine deutliche und leichte Art und Weise vortragen: denn es ist eine verdrüßliche Sache zu buchstabiren, wenn man schon lesen kan, ich geschweige, daß man das Buchstabiren öfters gar verlernt, ohnerachtet man zu lesen weiß. Indessen wäre es doch zu wünschen, daß einmahl ein Gelehrter, dem seine ausserordentliche Gabe der Dunckelheit und Verwirrung zugeeignet wäre, dergleichen Arbeit unternähme. Er würde sich ohnfehlbar um das menschliche Geschlecht sehr verdient machen. Denn es hat und wird niemals an Leuten fehlen, die sich einbilden, klüger als andere zu seyn, und es auch öfters in der That sind, daher sie den großmüthigen Entschluß fassen, die Algebra zu erlernen. Das heist, wenn man die Wahrheit sagen soll, daß sie sich in einen Irrgarten begeben, dessen Ende sie nicht absehen, und darinnen sie mit der grösten Beschwerlichkeit und zum Schaden ihrer Gesundheit herumlaufen müssen, um den Ausgang wieder zu finden, wohin sie mit der leichtesten

Mühe

Mühe hätten gelangen können, wenn ihnen der Gärtner einen Faden in die Hand gegeben, und solchen an die erste Thüre angebunden hätte. Daher kan es freylich geschehen, daß man Zeit und Mühe über der Algebra verlieret. Aber was ist schuld daran? in Wahrheit nichts anders, als eine unzeitige Begierde, klüger zu seyn, als die von der Natur verliehenen Kräfte erlauben, und die Ungedult unserer Führer, die sie verleitet, Luftsprünge zu machen, wenn sie uns gehen lernen sollen. Da nun aber dieses ein vor allemal so und nicht anders ist: so rathe ich einem ieden, denen es an natürlicher Fähigkeit, Gedult, Zeit und Gesundheit, oder zum wenigsten an dem Gelde, welches die Seele grosser Handlungen ist, fehlet, sich mit der Algebra niemals in einige Vertraulichkeit einzulassen. Denn ausser der gedachten Unbequemlichkeit befindet sich noch diese dabey, daß sie eine Lehrmeisterin ist, die ihre Schüler allzuklug und doch nicht klug genug machet, daß sie sich ihrer Klugheit nicht bisweilen zur Verhinderung ihrer zeitlichen Glückseeligkeit gebrauchen sollten. Denn sie gewöhnen sich, iederzeit die Wahrheit zu sagen, wie sie sie erkennen, und nichts zu behaupten, als was sich erweisen läst. Man hat mich aber versichern wollen, daß dieses zwey Maximen sind, davon die erste unter den Menschen schon lange

 nicht

nicht mehr Mode, und die letztere nur bey wenigen im Gebrauche gewesen sey. Kan man aber wol wider die Mode handeln, ohne gehasset oder zum wenigsten ausgelacht zu werden?

§. 81.

Ich werde den andern Einwurf, daß die Algebra keinen Nutzen habe, nicht besser heben können, als wenn ich den Nutzen anzeige, welchen man von ihr zu erwarten hat. Es ist aber derselbige von einer gedoppelten Art. Man hat einen Nutzen von den algebraischen Wahrheiten selbst und auch von der Art und Weise, wie sie erfunden werden. Was den erstern anbetrift, so ist er so groß, als überhaupt der Nutzen mathematischer Wahrheiten in dem gemeinen Leben seyn kan. Wer wollte aber diesen leugnen? Trägt vielleicht die Mechanick, die Optick, die Astronomie, die Geographie und die Architecktur nichts zur Beförderung der menschlichen Glückseeligkeit bey? und wie groß ist nicht der Vortheil, den die Naturlehre von der Algebra zu erwarten hat? Ich habe an einem andern Orte die Naturlehre die Königin unter den Wissenschaften und die Mathematick den Großschatzmeister genennet. Solte aber wol diese Königin nicht reitzender seyn, wenn sie in ihren Reichskleinodien, welche der Schatzmeister verwahrt, als wenn sie in ihrer Nachtkleidung erschiene? und

und ist wol iemahls die Naturlehre gewisser gewesen, als seit dem sie sich mit der Algebra verbunden hat? Newton war ohnstreitig einer der grösten Naturlehrer. Würde er es aber ohne Algebra iemahls geworden seyn? Man muß seine Schriften nicht gesehen haben, wenn man dieses behaupten will. Vielleicht verlohnt es aber sich nicht der Mühe, um der Naturlehre willen die Algebra zu studiren; sie beschäftiget sich nur mit den Körpern, das ist, mit Sachen, welche man hören, sehen, riechen, schmecken, fühlen kan, und um dergleichen gemeine Sachen bekümmert sich der Pöbel; aber eine erhabene Seele nimmt die Kräfte der Geister zu ihrem Zeitvertreibe, und man hat noch nicht gesehen, daß die Algebra iemanden in die Lehre von den einfachen Dingen eine grosse Einsicht verschaffet hätte. Ich muß gestehen, daß dieser Einwurf von einer solchen Wichtigkeit sey, daß ich ihn mit Stillschweigen werde übergehen müssen.

§. 82.

Nicht nur die algebraische Wahrheiten selbst, sondern auch die Art, dieselben herauszubringen, hat ihren Nutzen. Sie lernt uns gantz unvermerckt die Maximen, ordentlich zu dencken und neue Wahrheiten zu erfinden, ist aber dieses wol etwas so geringes? Ihr werdet sagen: dieses thut die Vernunftlehre auch. Ich habe aber aus-

ser dem, was ich eben schon geantwortet, die Erfahrung auf meiner Seite. Wer hat wol iemals die Kräffte des menschlichen Verstandes vollkommener eingesehen, als **Locke, Malebranche, Tschirnhausen, Leibnitz** und **Wolff**? Sie gestehen aber insgesamt, daß sie dieses der Mathematick zu dancken haben. Und wo treffen wir auch schönere Exempel von der Art richtig zu dencken an, als in der Algebra?

§. 83.

Man wird mich nach dem, was ich hier von der Algebra gesagt habe, für einen Liebhaber dieser Wissenschaft halten. Ich bin es auch in der That; aber ich verehre sie nicht, wie ein irrender Ritter seine Geliebte, und glaube nicht, daß die gröste Art der Verdienste diese sey, die Quadratur des Circkels zu erfinden. Nein, man muß den Werth der Sachen nicht allein nach ihrer Gewißheit, sondern auch nach ihren Nutzen beurtheilen. Und nun käme es darauf an, ob man durch die Algebra verständiger, tugendhafter, gesünder und reicher werden könne, als ohne dieselbe. Das erstere will ich gewisser massen einräumen, von den übrigen aber habe ich noch keine Probe gesehen, und gleichwol wird die letztere Eigenschaft heut zu Tage fast durchgehends für die gröste Vollkommenheit eines Menschen gehalten. **Newton** wird wol der eintzige Algebraiste

blei-

bleiben, welcher Großschatzmeister eines grossen Königes gewesen ist. Die Artzneygelehrten verschreiben die Algebra niemals in ihren Recepten; sondern verbieten vielmehr das Nachdencken, vermuthlich weil dieses ein Kraut ist, das sie nicht kennen, und ausser der Gedult wüste ich keine Tugend, die bey der Algebra ausgeübet würde. Es ist wahr, ich habe oben ihren Einfluß in die Naturlehre selbst behauptet, und ich würde mir ohnfehlbar widersprechen, wenn ich ihn in Zweifel ziehen wolte. Aber wenn man die Wahrheit sagen soll: so muß man gestehen, daß unter 10 algebraischen Sätzen kaum einer ist, welchen wir in der Naturlehre wieder anbringen können, und dieses hauptsächlich darum: weil wir theils die Sachen aus der Naturlehre nicht wissen, dabey sie angebracht werden können, theils die mathematischen Sätze solche Bedingungen haben, die zwar möglich, aber in der Welt, oder wenn es besser klingt, in unserer Welt nicht würcklich werden. Die Naturlehre aber hat es blos mit würcklichen Sachen zu thun. Herr Brockes sagt:

> Es hat ein iedes Ding zwey Seiten,
> So lange mans nicht hat, sieht mans stets von der schönen,
> Wenn mans besitzt, nur von der schlimmen Seite an.

Von der Algebra aber möchte man in Betrachtung der gantz unerhörten Lobeserhebungen, die sie von ihren Verehreren erhält, beynahe das Gegentheil behaupten und sagen:

Es hat die Algebra zwey Seiten.
Der, wer sie gar nicht kennt, sieht sie nur von der schlimmen,
Und wer sie kennt, stets von der schönen Seite an.

§. 84.

Nun habe ich nur noch drey Worte von den angehängten Primzahlen zu sagen. Primzahlen sind diejenigen, welche sich in keine Factores zerfällen lassen, durch deren Multiplication sie entstehen können. Die übrigen Zahlen werden numeri compositi genennet, und die Zerlegung derselben in ihre Factores heist anatomia numerorum. Sie haben in der Mathematick ihren Nutzen, welcher denen bereits bekannt ist, die sich mit der Mathematick beständig beschäftigen, und welchen ich denen, die gar nichts davon wissen, mit wenig Worten nicht begreiflich machen kan. Man muß daher dem Herrn Peter Jäger, Roßschreiber und Quartiermeister zu Nürnberg verbunden seyn, daß er sich die Mühe gegeben, nicht nur diese Zahlen weiter, als von ie-
manden

manden geschehen, auszurechnen, sondern auch eine vollständige anatomiam numerorum zu verfertigen. Ich sage, es werden Ihm einige Mathematickverständige dafür verbunden seyn, aber dieses ist es auch alles, was er für seine Mühe zu erwarten hat. Denn so hertzlich gern ich ihm auch die 2000 Thaler gönnen wollte, welche er in den Zeitungen als eine Belohnung für seine Arbeit verlangt hat, so gewiß weiß ich, daß er sie niemals dafür bekommen wird. Denn wenn ich die Wahrheit sagen soll: so hätte ich diese Abhandlung von der Algebra nicht geschrieben, wenn es nicht darum geschehen wäre, daß sie eine Artzeney seyn möchte, vermittelst welcher die mit schweren Geburtsschmertzen zur Welt gebrachten Primzahlen beym Leben erhalten werden könnten. Ich habe nicht die Ehre, diesen Herrn Peter Jäger zu kennen, ich sehe aber aus seinen an mich abgelassenen Briefen so viel, daß er ein ehrlicher und unermüdeter Mann seyn muß, welcher aber von unserm Halle und seinen Primzahlen gantz verkehrte Begriffe hat. Das lächerlichste bey der gantzen Sache ist dieses, daß wir uns beyde einander durch allzugrosse Höflichkeit betrogen haben. Denn der Herr Jäger schickte mir seine Primzahlen in der redlichen Absicht, mich oder wol gar noch viele andere Menschen, welche dieses Artztes nicht bedürfen,

sen, dadurch glücklich zu machen. Ich hingegen glaubte ihm einen Dienst zu thun, wenn ich die überschickten Primzahlen durch meine Vorstellung zum Drucke befördern liesse. Also ist er eines grossen Schatzes beraubt worden, dadurch mir kein grösserer Vortheil zugewachsen ist, als die Beschwerlichkeit, die gegenwärtigen Bogen zu schreiben. Indessen versichere ich, daß ich dieses alles aus keiner andern Ursache hier anführe, als dem Herrn Peter Jäger zu zeigen, daß ich ein ehrlicher Mann sey, der sich weder mit fremder Weisheit breit zu machen, noch auch das geringste damit zu erwerben verlangt.

ENDE.

In den Primzahlen wird p. 8 an statt 31127 gesetzt 13127.



1	151	353	577	811	1051
2	157	359	587	821	1061
3	163	367	593	823	1063
5	167	373	599	827	1069
7	173	379	601	829	1087
11	179	383	607	839	1091
13	181	389	613	853	1093
17	191	397	617	857	1097
19	193	401	619	859	1103
23	197	409	631	863	1109
29	199	419	641	877	1117
31	211	421	643	881	1123
37	223	431	647	883	1129
41	227	433	653	887	1151
43	229	439	659	907	1153
47	233	443	661	911	1163
53	239	449	673	919	1171
59	241	457	677	929	1181
61	251	461	683	937	1187
67	257	463	691	941	1193
71	263	467	701	947	1201
73	269	479	709	953	1213
79	271	487	719	967	1217
83	277	491	727	971	1223
89	281	499	733	977	1229
97	283	503	739	983	1231
101	293	509	743	991	1237
103	307	521	751	997	1249
107	311	523	757	1009	1259
109	313	541	761	1013	1277
113	317	547	769	1019	1279
127	331	557	773	1021	1283
131	337	563	787	1031	1289
137	347	569	797	1033	1291
139	349	571	809	1039	1297
149				1049	

1301	1571	1847	2111	2383	2683
1303	1579	1861	2113	2389	2687
1307	1583	1867	2129	2393	2689
1319	1597	1871	2131	2399	2693
1321	———	1873	2137	———	2699
1327	1601	1877	2141	2411	———
1361	1607	1879	2143	2417	2707
1367	1609	1889	2153	2423	2711
1373	1613	———	2161	2437	2713
1381	1619	1901	2179	2441	2719
1399	1621	1907	———	2447	2729
———	1627	1913	2203	2459	2731
1409	1637	1931	2207	2467	2741
1423	1657	1933	2213	2473	2749
1427	1663	1949	2221	2477	2753
1429	1667	1951	2237	———	2767
1433	1669	1973	2239	2503	2777
1439	1693	1979	2243	2521	2789
1447	1697	1987	2251	2531	2791
1451	1699	1993	2267	2539	2797
1453	———	1997	2269	2543	———
1459	1709	1999	2273	2549	2801
1471	1721	———	2281	2551	2803
1481	1723	2003	2287	2557	2819
1483	1733	2011	2293	2579	2833
1487	1741	2017	2297	2591	2837
1489	1747	2027	———	2593	2843
1493	1753	2029	2309	———	2851
1499	1759	2039	2311	2609	2857
———	1777	2053	2333	2617	2861
1511	1783	2063	2339	2621	2879
1523	1787	2069	2341	2633	2887
1531	1789	2081	2347	2647	2897
1543	———	2083	2351	2657	———
1549	1801	2087	2357	2659	2903
1553	1811	2089	2371	2663	2909
1559	1823	2099	2377	2671	2917
1567	1831	———	2381	2677	2927

2939	3253	3533	3803	4099	4397
2953	3257	3539	3821	—	—
2957	3259	3541	3823	4111	4409
2963	3271	3547	3833	4127	4421
2969	3299	3557	3847	4129	4423
2971	—	3559	3851	4133	4441
2999	3301	3571	3853	4139	4447
—	3307	3581	3863	4153	4451
3001	3313	3583	3877	4157	4457
3011	3319	3593	3881	4159	4463
3019	3323	—	3889	4177	4481
3023	3329	3607	—	—	4483
3037	3331	3613	3907	4201	4493
3041	3343	3617	3911	4211	—
3049	3347	3623	3917	4217	4507
3061	3359	3631	3919	4219	4513
3067	3361	3637	3923	4229	4517
3079	3371	3643	3929	4231	4519
3083	3373	3659	3931	4241	4523
3089	3389	3671	3943	4243	4547
—	3391	3673	3947	4253	4549
3109	—	3677	3967	4259	4561
3119	3407	3691	3989	4261	4567
3121	3413	3697	—	4271	4583
3137	3433	—	4001	4273	4591
3163	3449	3701	4003	4283	4597
3167	3457	3709	4007	4289	—
3169	3461	3719	4013	4297	4603
3181	3463	3727	4019	—	4621
3187	3467	3733	4021	4327	4637
3191	3469	3739	4027	4337	4639
—	3491	3761	4049	4339	4643
3203	3499	3767	4051	4349	4649
3209	—	3769	4057	4357	4651
3217	3511	3779	4073	4363	4657
3221	3517	3793	4079	4373	4663
3229	3527	3797	4091	4391	4673
3251	3529	—	4093		4679

4691	4999	5303	5591	5869	6203
—	—	5309	—	5879	6211
4703	5003	5323	5623	5881	6217
4721	5009	5333	5639	5897	6221
4723	5011	5347	5641	—	6229
4729	5021	5351	5647	5903	6247
4733	5023	5381	5651	5923	6257
4751	5039	5387	5653	5927	6263
4759	5051	5393	5657	5939	6269
4783	5059	5399	5659	5953	6271
4787	5077	—	5669	5981	6277
4789	5081	5407	5683	5987	6287
4793	5087	5413	5689	—	6299
4799	5099	5417	5693	6007	—
—	—	5419	—	6011	6301
4801	5101	5431	5701	6029	6311
4813	5107	5437	5711	6037	6317
4817	5113	5441	5717	6043	6323
4831	5119	5443	5737	6047	6329
4861	5147	5449	5741	6053	6337
4871	5153	5471	5743	6067	6343
4877	5167	5477	5749	6073	6353
4889	5171	5479	5779	6079	6359
—	5179	5483	5783	6089	6361
4903	5189	—	5791	6091	6367
4909	5197	5501	—	—	6373
4919	—	5503	5801	6101	6379
4931	5209	5507	5807	6113	6389
4933	5227	5519	5813	6121	6397
4937	5231	5521	5821	6131	—
4943	5233	5527	5827	6133	6421
4951	5237	5531	5839	6143	6427
4957	5261	5557	5843	6151	6449
4967	5273	5563	5849	6163	6451
4969	5279	5569	5851	6173	6469
4973	5281	5573	5857	6197	6473
4987	5297	5581	5861	6199	6481
4993	—		5867	—	

6491	6803	7109	7477	7727	8087
—	6823	7121	7481	7741	8089
6521	6827	7127	7487	7753	8093
6529	6829	7129	7489	7757	—
6547	6833	7151	7499	7759	8101
6551	6841	7159	—	7789	8111
6553	6857	7177	7507	7793	8117
6563	6863	7187	7517	—	8123
6569	6869	7193	7523	7817	8147
6571	6871	—	7529	7823	8161
6577	6883	7207	7537	7829	8167
6581	6899	7211	7541	7841	8171
6599	—	7213	7547	7853	8179
—	6907	7219	7549	7867	8191
6607	6911	7229	7559	7873	—
6619	6917	7237	7561	7877	8209
6637	6947	7243	7573	7879	8219
6653	6949	7247	7577	7883	8221
6659	6959	7253	7583	—	8231
6661	6961	7283	7589	7901	8233
6673	6967	7297	7591	7907	8237
6679	6971	—	—	7919	8243
6689	6977	7307	7603	7927	8263
6691	6983	7309	7607	7933	8269
—	6991	7321	7621	7937	8273
6701	6997	7331	7639	7949	8287
6703	—	7333	7643	7951	8291
6709	7001	7349	7649	7963	8293
6719	7013	7351	7669	7993	8297
6733	7019	7369	7673	—	—
6737	7027	7393	7681	8009	8311
6761	7039	—	7687	8011	8317
6763	7043	7411	7691	8017	8329
6779	7057	7417	7699	8039	8353
6781	7069	7433	—	8053	8363
6791	7079	7451	7703	8059	8369
6793	—	7457	7717	8069	8377
—	7103	7459	7723	8081	8387

8389	8707	9011	9337	9631	9931
8419	8713	9013	9341	9643	9941
8423	8719	9029	9343	9649	9949
8429	8731	9041	9349	9661	9967
8431	8737	9043	9371	9677	9973
8443	8741	9049	9377	9679	10007
8447	8747	9059	9391	9689	10009
8461	8753	9067	9397	9697	10037
8467	8761	9091	9403	9719	10039
8501	8779	9103	9413	9721	10061
8513	8783	9109	9419	9733	10067
8521	8803	9127	9421	9739	10069
8527	8807	9133	9431	9743	10079
8537	8819	9137	9433	9749	10091
8539	8821	9151	9437	9767	10093
8543	8831	9157	9439	9769	10099
8563	8837	9161	9461	9781	10103
8573	8839	9173	9463	9787	10111
8581	8849	9181	9467	9791	10133
8597	8861	9187	9473	9803	10139
8599	8863	9199	9479	9811	10141
8609	8867	9203	9491	9817	10151
8623	8887	9209	9497	9829	10159
8627	8893	9221	9511	9833	10163
8629	8923	9227	9521	9839	10169
8641	8929	9239	9533	9851	10177
8647	8933	9241	9539	9857	10181
8663	8941	9257	9547	9859	10193
8669	8951	9277	9551	9871	10211
8677	8963	9281	9587	9883	10223
8681	8969	9283	9601	9887	10243
8689	8971	9293	9613	9901	10247
8693	8999	9311	9619	9907	10253
8699	9001	9319	9623	9923	10259
	9007	9323	9629	9929	10267

10271	10607	10937	11261	11597	11927
10273	10613	10939	11273	——	11933
10289	10627	10949	11279	11617	11939
——	10631	10957	11287	11621	11941
10301	10639	10973	11299	11633	11953
10303	10651	10979	——	11657	11959
10313	10657	10987	11311	11677	11969
10321	10663	10993	11317	11681	11971
10331	10667	——	11321	11689	11981
10333	10687	11003	11329	11699	11987
10337	10691	11027	11351	——	——
10343	——	11047	11353	11701	12007
10357	10709	11057	11369	11717	12011
10369	10711	11059	11383	11719	12037
10391	10723	11069	11393	11731	12041
10399	10729	11071	11399	11743	12043
——	10733	11083	——	11777	12049
10427	10739	11087	11411	11779	12071
10429	10753	11093	11423	11783	12073
10433	10771	——	11437	11789	12097
10453	10781	11113	11443	——	——
10457	10789	11117	11447	11801	12101
10459	10799	11119	11467	11807	12107
10463	——	11131	11471	11813	12109
10477	10831	11149	11483	11821	12113
10487	10837	11159	11489	11827	12119
10499	10847	11161	11491	11831	12143
——	10853	11171	11497	11833	12149
10501	10859	11173	——	11839	12157
10513	10861	11177	11503	11863	12161
10529	10867	11197	11519	11867	12163
10531	10883	——	11527	11887	12197
10559	10889	11213	11549	11897	——
10567	10891	11239	11551	——	12203
10589	——	11243	11579	11903	12211
10597	10903	11251	11587	11909	12227
——	10909	11257	11593	11923	12239
10601					

12241	12541	12889	13177	13523	13859
12251	12547	12893	13183	13537	13873
12253	12553	12899	13187	13553	13877
12263	12569	——	——	13567	13879
12269	12577	12907	13217	13577	13883
12277	12583	12911	13219	13591	——
12281	12589	12917	13229	13597	13901
12289	——	12919	13241	——	13903
——	12601	12923	13249	13613	13907
12301	12611	12941	13259	13619	13913
12323	12613	12953	13267	13627	13921
12329	12619	12959	13291	13633	13931
12343	12637	12967	13297	13649	13933
12347	12641	12973	——	13669	13963
12373	12647	12979	13309	13679	13967
12377	12653	12983	13313	13681	13997
12379	12659	——	13327	13687	13999
12391	12671	13001	13331	13691	——
——	12689	13003	13337	13693	14009
12401	12697	13007	13339	13697	14011
12409	——	13009	13367	——	14029
12413	12703	13033	13381	13709	14033
12421	12713	13037	13397	13711	14051
12433	12721	13043	13399	13721	14057
12437	12739	13049	——	13723	14071
12451	12743	13063	13411	13729	14081
12457	12757	13093	13417	13751	14083
12473	12763	13099	13421	13757	14087
12479	12781	——	13441	13759	——
12487	12791	13103	13451	13763	14107
12491	12799	13109	13457	13781	14143
12497	——	13121	13463	13789	14149
——	12809	13127	13469	13799	14153
12503	12821	13147	13477	——	14159
12511	12823	13151	13487	13807	14173
12517	12829	13159	13499	13829	14177
12527	12841	13163	——	13831	14197
12539	12853	13171	13513	13841	——
					14207

14221	14561	14869	15217	15511	15817
14243	14563	14879	15227	15527	15823
14249	14591	14887	15233	15541	15859
14251	14593	14891	15241	15551	15877
14281	—	14897	15259	15559	15881
14293	14621	—	15263	15569	15887
—	14627	14923	15269	15581	15889
14303	14629	14929	15271	15583	—
14321	14633	14939	15277	—	15901
14323	14639	14947	15287	15601	15907
14327	14653	14951	15289	15607	15913
14341	14657	14957	15299	15619	15919
14347	14669	14969	—	15629	15923
14369	14683	14983	15307	15641	15937
14387	14699	—	15313	15643	15959
14389	—	15013	15319	15647	15971
—	14713	15017	15329	15649	15973
14401	14717	15031	15331	15661	15991
14407	14723	15053	15349	15667	—
14411	14731	15061	15359	15671	16001
14419	14737	15073	15361	15679	16007
14423	14741	15077	15373	15683	16033
14431	14747	15083	15377	—	16057
14437	14753	15091	15383	15727	16061
14447	14759	—	15391	15731	16063
14449	14767	15101	—	15733	16067
14461	14771	15107	15401	15737	16069
14479	14779	15121	15413	15739	16073
14489	14783	15131	15427	15749	16087
—	14797	15137	15439	15761	16091
14503	—	15139	15443	15767	16097
14519	14813	15149	15451	15773	—
14533	14821	15161	15461	15787	16103
14537	14827	15173	15467	15791	16111
14543	14831	15187	15473	15797	16127
14549	14843	15193	15493	—	16139
14551	14851	15199	15497	15803	16141
14557	14867	—	—	15809	16183

16187	16547	16901	17209	17551	17909
16189	16553	16903	17231	17569	17911
16193	16561	16921	17239	17573	17921
— — —	16567	16927	17257	17579	17923
16217	16573	16931	17291	17581	17929
16223	— —	16937	17293	17597	17939
16229	16603	16943	17299	17599	17957
16231	16607	16963	———	———	17959
16249	16619	16979	17317	17609	17971
16253	16631	16981	17321	17623	17977
16267	16633	16987	17327	17627	17981
16273	16649	16993	17333	17657	17987
— — —	16651	———	17341	17659	17989
16301	16657	17011	17351	17669	———
16319	16661	17021	17359	17681	18013
16333	16673	17027	17377	17683	18041
16339	16691	17029	17383	———	18043
16349	16693	17033	17387	17707	18047
16361	16699	17041	17389	17713	18049
16363	———	17047	17393	17729	18059
16369	16703	17053	———	17737	18061
16381	16729	17077	17401	17747	18077
— — —	16741	17093	17417	17749	18089
16411	16747	17099	17419	17761	18097
16417	16759	———	17431	17783	———
16421	16763	17107	17443	17789	18119
16427	16787	17117	17449	17791	18121
16433	———	17123	17467	———	18127
16447	16811	17137	17471	17807	18131
16451	16823	17159	17477	17827	18133
16453	16829	17167	17483	17837	18143
16477	16831	17183	17489	17839	18149
16481	16843	17189	17491	17851	18169
16487	16871	17191	17497	17863	18181
16493	16879	———	———	17881	18191
———	16883	17203	17509	17891	18199
16519	16889	17207	17519	———	———
16529	———		17539	17903	

18211	18517	18919	19301	19597	19963
18217	18521	18947	19309	—	19973
18223	18523	18959	19319	19603	19979
18229	18539	18973	19333	19609	19991
18233	18541	18979	19373	19661	19993
18251	18553	—	19379	19681	19997
18253	18583	19001	19381	19687	—
18257	18587	19009	19387	19697	20011
18269	18593	19013	19391	19699	20021
18287	—	19031	—	—	20023
18289	18617	19037	19403	19709	20029
—	18637	19051	19417	19717	20047
18301	18661	19069	19421	19727	20051
18307	18671	19073	19423	19739	20063
18311	18679	19079	19427	19751	20071
18313	18691	19081	19429	19753	20089
18329	—	19087	19433	19759	—
18341	18701	—	19441	19763	20101
18353	18713	19121	19447	19777	20107
18367	18719	19139	19457	19793	20113
18371	18731	19141	19463	—	20117
18379	18743	19157	19469	19801	20123
18397	18749	19163	19471	19813	20129
—	18757	19181	19477	19819	20143
18401	18773	19183	19483	19841	20147
18413	18787	—	19489	19843	20149
18427	18793	19207	—	19853	20161
18433	18797	19211	19501	19861	20173
18439	—	19213	19507	19867	20177
18443	18803	19219	19531	19889	20183
18451	18839	19231	19541	19891	—
18457	18859	19237	19543	—	20201
18461	18869	19249	19553	19913	20219
18481	18899	19259	19559	19919	20231
18493	—	19267	19571	19927	20233
—	18911	19273	19577	19937	20249
18503	18913	19289	19583	19949	20261
	18917	—		19961	

20269	20627	20981	21317	21611	21961
20287	20639	20983	21319	21613	21977
20297	30641	——	21323	21617	21991
——	20663	21001	21341	21647	21997
20323	20681	21011	21347	21649	——
20327	20693	21013	21377	21661	22003
20333	——	21017	21379	21673	22013
20341	20707	21019	21383	21683	22027
20347	20717	21023	21391	——	22031
20353	20719	21031	21397	21701	22037
20357	20731	21059	——	21713	22039
20359	20743	21061	21401	21727	22051
20369	20747	21067	21407	21737	22063
20389	20749	21089	21419	21739	22067
20393	20753	——	21433	21751	22073
20399	20759	21101	21467	21757	22079
——	20771	21107	21481	21767	22091
20407	20773	21121	21487	21773	22093
20411	20789	21139	21491	21787	——
20431	——	21143	21493	21799	22109
20441	20807	21149	21499	——	22111
20443	20809	21157	——	21803	22123
20477	20849	21163	21503	21817	22129
20479	20857	21169	21517	21821	22133
20483	20873	21179	21521	21839	22147
——	20879	21187	21523	21841	22153
20507	20887	21191	21529	21851	22157
20509	20897	21193	21557	21859	22159
20521	20899	——	21559	21863	22171
20533	——	21211	21563	21871	22189
20543	20903	21221	21569	21881	22193
20549	20921	21227	21577	21893	——
20551	20929	21247	21587	——	22229
20563	20939	21269	21589	21911	22247
20593	20947	21277	21599	21929	22259
20599	20959	21283	——	21937	22271
——	20963	——	21601	21943	22273
20611		21313			

22277

22277	22639	22993	23297	23663	23977
22279	22643	—	—	23669	23981
22283	22651	23003	23311	23671	23993
22291	22669	23011	23321	23677	—
—	22679	23017	23327	23687	24001
22303	22691	23021	23333	23689	24007
22307	22697	23027	23339	—	24019
22343	22699	23029	23357	23719	24023
22349	—	23039	23369	23741	24029
22367	22709	23041	23371	23743	24043
22369	22717	23053	23399	23747	24049
22381	22721	23057	—	23753	24061
22391	22727	23059	23417	23761	24071
22397	22739	23063	23431	23767	24077
—	22741	23071	23447	23773	24083
22409	22751	23081	23459	23789	24091
22433	22769	23087	23473	—	24097
22441	22777	23099	23497	23801	—
22447	22783	—	—	23813	24103
22453	22787	23117	23509	23819	24107
22469	—	23131	23531	23827	24109
22481	22807	23143	23537	23831	24113
22483	22811	23159	23539	23833	24121
—	22817	23167	23549	23857	24133
22501	22853	23173	23557	23869	24137
22511	22859	23189	23561	23873	24151
22531	22861	23197	23563	23879	24169
22541	22871	—	23567	23887	24179
22543	22877	23201	23581	23893	24181
22549	—	23203	23593	23899	24197
22567	22901	23209	23599	—	—
22571	22907	23227	—	23909	24203
22573	22921	23251	23603	23911	24223
—	22937	23269	23609	23917	24229
22613	22943	23279	23623	23929	24239
22619	22961	23291	23627	23957	24247
22621	22963	23293	23629	23971	24251
22637	22973		23633		

24281	24697	25097	25447	25799	26161
24317	24709	25111	25453	25801	26171
24329	24733	25117	25457	25819	26177
24337	24749	25121	25463	25841	26183
24359	24763	25127	25469	25847	26189
24371	24767	25147	25471	25849	26203
24373	24781	25153	25523	25867	26209
24379	24793	25163	25537	25873	26227
24391	24799	25169	25541	25889	26237
24407	24809	25171	25561	25903	26249
24413	24821	25183	25577	25913	26251
24419	24841	25189	25579	25919	26261
24421	24847	25219	25583	25931	26263
24439	24851	25229	25589	25933	26267
24443	24859	25237	25601	25939	26293
24469	24877	25243	25603	25943	26297
24473	24889	25247	25609	25951	26309
24481	24907	25253	25621	25969	26317
24499	24917	25261	25633	25981	26321
24509	24919	25301	25639	25997	26339
24517	24923	25303	25643	25999	26347
24527	24943	25307	25657	26003	26357
24533	24953	25309	25667	26017	26371
24547	24967	25321	25673	26021	26387
24551	24971	25339	25679	26029	26393
24571	24977	25343	25693	26041	26399
24593	24979	25349	25703	26053	26407
24611	24989	25357	25717	26083	26417
24623	25013	25367	25733	26099	26423
24631	25031	25373	25741	26107	26431
24659	25033	25391	25747	26111	26437
24671	25037	25409	25759	26113	26449
24677	25057	25411	25763	26119	26459
24683	25073	25423	25771	26141	26479
24691	25087	25439	25793	26153	26489

26497

26597	26839	27197	27611	27941	28297
—	26849	—	27617	27943	—
26501	26861	27211	27631	27947	28307
26513	26863	27239	27647	27953	28309
26539	26879	27241	27653	27961	28319
26557	26881	27253	27673	27967	28349
26561	26891	27259	27689	27983	28351
26573	26893	27271	27691	27997	28387
26591	—	27277	27697	—	28393
26597	26903	27281	—	28001	—
—	26921	27283	27701	28019	28403
26627	26927	27299	27733	28027	28409
26633	26947	—	27737	28031	28411
26641	26951	27329	27739	28051	28429
26647	26953	27337	27743	28057	28433
26669	26959	27361	27749	28069	28439
26681	26981	27367	27751	28081	28447
26683	26987	27397	27763	28087	28463
26687	26993	—	27767	28097	28477
26693	—	27407	27773	28099	28493
26699	27011	27409	27779	—	28499
—	27017	27427	27791	28109	—
26701	27031	27431	27793	28111	28513
26711	27043	27437	27799	28123	28517
26713	27059	27449	—	28151	28537
26717	27061	27457	27803	28163	28541
26723	27067	27479	27809	28181	28547
26729	27073	27481	27817	28183	28549
26731	27077	27487	27823	—	28559
26737	27091	—	27827	28201	28571
26759	—	27509	27847	28211	28573
26777	27103	27527	27851	28219	28579
26783	27107	27529	27883	28229	28591
—	27109	27539	27893	28277	28597
26801	27127	27541	—	28279	—
26813	27143	27551	27901	28283	28603
26821	27179	27581	27917	28289	28607
26833	27191	27583	27919		28619
		—			

28621	28949	29311	29671	30097	30449
28627	28961	29327	29683	—	30467
28631	28979	29333	—	30103	30469
28643	—	29339	29717	30109	30491
28649	29009	29347	29723	30113	30493
28657	29017	29363	29741	30119	30497
28661	29021	29383	29753	30133	—
28663	29023	29387	29759	30137	30509
28669	29027	29389	29761	30139	30517
28687	29033	29399	29789	30161	30529
28697	29059	—	—	30169	30539
—	29063	29401	29803	30181	30553
28703	29077	29411	29819	30187	30557
28711	—	29423	29833	30197	30559
28723	29101	29429	29837	—	30577
28729	29123	29437	29851	30203	30593
28751	29129	29443	29863	30211	—
28753	29131	29453	29867	30223	30631
28759	29137	29473	29873	30241	30637
28771	29147	29483	29879	30253	30643
28789	29153	—	29881	30259	30649
28793	29167	29501	—	30269	30661
—	29173	29527	29917	30271	30671
28807	29179	29531	29921	30293	30677
28813	29191	29537	29927	—	30689
28817	—	29567	29947	30307	30697
28837	29201	29569	29959	30313	—
28843	29207	29573	29983	30319	30703
28859	29209	29581	29989	30323	30707
28867	29221	29587	—	30341	30713
28871	29231	29599	30011	30347	30727
28879	29243	—	30013	30367	30757
—	29251	29611	30029	30389	30763
28901	29269	29629	30047	30391	30773
28909	29287	29633	30059	—	30781
28921	29297	29641	30071	30403	—
28927	—	29663	30089	30427	30803
28933	29303	29669	30091	30431	30809

30817	31159	31513	31891	32257	32569
30829	31177	31517	———	32261	32573
30839	31181	31531	31907	32297	32579
30841	31183	31541	31957	32299	32587
30851	31189	31543	31963	———	———
30853	31193	31547	31973	32303	32603
30859	———	31567	31981	32309	32609
30869	31219	31573	31991	32321	32611
30871	31223	31583	———	32323	32621
30881	31231	———	32003	32327	32633
30893	31237	31601	32009	32341	32647
———	31247	31607	32027	32353	32653
30911	31249	31627	32029	32359	32687
30931	31253	31643	32051	32363	32693
30937	31259	31649	32057	32369	———
30941	31267	31657	32059	32371	32707
30949	31271	31663	32063	32377	32713
30971	31277	31667	32069	32381	32717
30977	———	31687	32077	———	32719
30983	31307	31699	32083	32401	32749
———	31319	———	32089	32411	32771
31013	31321	31721	32099	32413	32779
31019	31327	31723	———	32423	32783
31033	31333	31727	32117	32429	32789
31039	31337	31729	32119	32441	32797
31051	31357	31741	32141	32443	———
31063	31379	31751	32143	32467	32801
31069	31387	31769	32159	32479	32803
31079	31391	31771	32173	32491	32831
31081	31393	31793	32183	32497	32833
31091	31397	31799	32189	———	32839
———	———	———	32191	32503	32843
31121	31469	31817	———	32507	32869
31123	31477	31847	32203	32531	32887
31139	31481	31849	32213	32533	———
31147	31489	31859	32233	32537	32909
31151	———	31873	32237	32561	32911
31153	31511	31883	32251	32563	32917

32933	33289	33599	33923	34303	34651
32939	—	—	33931	34313	34667
32941	33301	33601	33937	34319	34673
32957	33311	33613	33941	34327	34679
32969	33317	33617	33961	34337	34687
32971	33329	33619	33967	34351	34693
32983	33331	33623	33997	34361	—
32987	33343	33629	—	34367	34703
32993	33347	33637	34019	34369	34721
32999	33349	33641	34031	34381	34729
—	33353	33647	34033	—	34739
33013	33359	33679	34039	34403	34747
33023	33377	—	34057	34421	34757
33029	33391	33703	34061	34429	34759
33037	—	33713	—	34439	34763
33049	33403	33721	34123	34457	34781
33053	33409	33739	34127	34469	—
33071	33413	33749	34129	34471	34807
33073	33427	33751	34141	34483	34819
33083	33457	33757	34147	34487	34841
33091	33461	33767	34157	34499	34843
—	33469	33769	34159	—	34847
33107	33479	33773	34171	34501	34849
33113	33487	33791	34183	34511	34871
33119	33493	33797	—	34513	34877
33149	—	—	34211	34519	34883
33151	33503	33809	34213	34537	34897
33161	33521	33811	34217	34543	—
33179	33529	33827	34231	34549	34913
33181	33533	33829	34253	34583	34919
33191	33547	33851	34259	34589	34939
33199	33563	33857	34261	34591	34949
—	33569	33863	34267	—	34961
33203	33577	33871	34273	34603	34963
33211	33581	33889	34283	34607	34981
33223	33587	33893	34297	34613	—
33247	33589	—	—	34631	35023
33287		33911	34301	34649	35027

35051	35393	35801	36137	36527	36847
35053	—	35803	36151	36529	36857
35059	35401	35809	36161	36541	36871
35069	35407	35831	36187	36551	36877
35081	35419	35837	36191	36559	36887
35083	35423	35839	—	36563	36899
35089	35437	35851	36209	36571	—
35099	35447	35863	36217	36583	36901
—	35449	35869	36229	36587	36913
35107	35461	35879	36241	36599	36919
35111	35491	35897	36251	—	36923
35117	—	35899	36263	36607	36929
35129	35507	—	36269	36629	36931
35141	35509	35911	36277	36637	36943
35149	35521	35923	36293	36643	36947
35153	35527	35933	36299	36653	36973
35159	35531	35951	—	36671	36979
35171	35533	35963	36307	36677	36997
—	35537	35969	36313	36683	—
35201	35543	35977	36319	36691	37003
35221	35569	35983	36341	36697	37013
35227	35573	35993	36343	—	37019
35251	35591	35999	36353	36709	37021
35257	35593	—	36373	36713	37039
35267	35597	36007	36383	36721	37049
35279	—	36011	36389	36739	37057
35281	35603	36013	—	36749	37061
35291	35617	36017	36433	36761	37087
—	35671	36037	36451	36767	37097
35311	35677	36061	36457	36779	—
35317	—	36067	36467	36781	37117
35323	35729	36073	36469	36787	37123
35327	35731	36083	36473	36791	37139
35339	35747	36097	36479	36793	37159
35353	35753	—	36493	—	37171
35363	35759	36107	36497	36809	37181
35381	35771	36109	—	36821	37189
	35797	36131	36523	36833	
	—				

37199	37547	37907	38303	38707	39079
—	37549	37951	38317	38711	39089
37201	37561	37957	38321	38713	39097
37217	37567	37963	38327	38723	—
37223	37571	37967	38329	38729	39103
37243	37573	37987	38333	38737	39107
37253	37579	37991	38351	38747	39113
37273	37589	37993	38371	38749	39119
37277	37591	37997	38377	38767	39133
—	—	—	38393	38783	39139
37307	37607	38011	—	38791	39157
37309	37619	38039	38431	—	39161
37313	37633	38047	38447	38803	39163
37321	37643	38053	38449	38821	39181
37337	37649	38069	38453	38833	39191
37339	37657	38083	38459	38839	39199
37357	37663	—	38461	38851	—
37361	37691	38113	—	38861	39209
37363	37693	38119	38501	38867	39217
37369	37699	38149	38543	38873	39227
37379	—	38153	38557	38891	39229
37397	37717	38167	38561	—	39233
—	37747	38177	38567	38903	39239
37409	37781	38183	38569	38917	39241
37423	37783	38189	38593	38921	39251
37441	37799	38197	—	38923	39293
37447	—	—	38603	38933	—
37463	37811	38201	38609	38953	39301
37483	37813	38219	38611	38959	39313
37489	37831	38231	38629	38971	39317
37493	37847	38237	38639	38977	39323
—	37853	38239	38651	38993	39341
37501	37861	38261	38653	—	39343
37507	37871	38273	38669	39019	39359
37511	37879	38281	38671	39023	39367
37517	37889	38287	38677	39041	39371
37529	37897	38299	38693	39043	39373
37537	—	—	38699	39047	39383

39397	39791	40129	40531	40903	41243
—	39799	40151	40543	40927	41257
39409	—	40153	40559	40933	41263
39419	39821	40163	40577	40939	41269
39439	39827	40169	40583	40949	41281
39443	39829	40177	40591	40961	41299
39451	39839	40189	40597	40973	—
39461	39841	40193	—	40993	41333
39499	39847	—	40609	—	41341
—	39857	40213	40627	41011	41351
39503	39863	40231	40637	41017	41357
39509	39869	40237	40639	41023	41381
39511	39877	40241	40693	41039	41387
39521	39883	40253	40697	41047	41389
39541	39887	40277	40699	41051	41399
39551	—	40283	—	41057	—
39563	39901	40289	40709	41077	41411
39569	39929	—	40739	41081	41413
39581	39937	40343	40751	—	41443
—	39953	40351	40759	41113	41453
39607	39971	40357	40763	41117	41467
39619	39979	40361	40771	41131	41479
39623	39983	40387	40787	41141	41491
39631	39989	—	—	41143	—
39659	—	40423	40801	41149	41507
39667	40009	40427	40813	41161	41513
39671	40013	40429	40819	41177	41519
39679	40031	40433	40823	41179	41521
—	40037	40459	40829	41183	41539
39703	40039	40471	40841	41189	41543
39709	40063	40483	40847	—	41549
39719	40087	40487	40849	41201	41579
39727	40093	40493	40853	41203	41593
39733	40099	40499	40867	41213	41597
39749	—	—	40879	41221	—
39761	40111	40507	40883	41227	41603
39769	40123	40519	40897	41231	41609
39779	40127	40529	—	41233	41611

41617	41959	42299	42643	42967	43403
41621	41969	42307	42649	42979	43411
41627	41981	42323	42667	42989	43427
41641	41983	42331	42677	43003	43441
41647	41999	42337	42683	43013	43451
41651	42013	42349	42689	43019	43457
41659	42017	42359	42697	43037	43481
41669	42019	42373	42701	43049	43487
41681	42023	42379	42703	43051	43499
41687	42043	42391	42709	43063	43517
41719	42061	42397	42719	43067	43541
41729	42071	42403	42727	43093	43543
41737	42073	42407	42737	43103	43573
41759	42083	42409	42743	43117	43577
41761	42089	42433	42751	43133	43579
41771	42101	42437	42767	43151	43591
41777	42131	42443	42773	43159	43597
41801	42139	42451	42787	43177	43607
41809	42157	42457	42793	43189	43609
41813	42169	42461	42797	43201	43613
41843	42179	42463	42821	43207	43627
41849	42181	42467	42829	43223	43633
41851	42187	42473	42839	43237	43649
41863	42193	42487	42841	43261	43651
41879	42197	42491	42853	43271	43661
41887	42209	42499	42859	43283	43669
41893	42221	42509	42863	43291	43691
41897	42223	42533	42899	43313	43711
41903	42227	42557	42901	43319	43717
41911	42239	42569	42923	43321	43721
41927	42257	42571	42929	43331	43753
41941	42281	42577	42937	43391	43759
41947	42283	42589	42943	43397	43777
41953	42293	42611	42953	43399	43781
41957		42641	42961		43783

43787	44159	44543	44909	45307	45691
43789	44171	44549	44917	45317	45697
43793	44179	44563	44927	45319	45707
43801	44189	44579	44939	45329	45737
43853	44201	44587	44953	45337	45751
43867	44203	44617	44959	45341	45757
43889	44207	44621	44963	45343	45763
43891	44221	44623	44971	45361	45767
43913	44249	44633	44983	45377	45779
43933	44257	44641	44987	45389	45817
43943	44263	44647	45007	45403	45821
43951	44267	44651	45013	45413	45823
43961	44269	44657	45053	45427	45827
43963	44273	44683	45061	45433	45833
43969	44279	44687	45077	45439	45841
43973	44281	44699	45083	45481	45853
43987	44293	44701	45119	45491	45863
43991	44351	44711	45121	45497	45869
43997	44357	44729	45127	45503	45887
44017	44371	44741	45131	45523	45893
44021	44381	44753	45137	45533	45943
44027	44383	44771	45139	45541	45949
44029	44389	44773	45161	45553	45953
44041	44417	44777	45179	45557	45959
44053	44449	44789	45181	45569	45971
44059	44453	44797	45191	45587	45979
44071	44483	44809	45197	45589	45989
44087	44491	44819	45233	45599	46021
44089	44497	44839	45247	45613	46027
44101	44501	44843	45259	45631	46049
44111	44507	44851	45263	45641	46051
44119	44519	44867	45281	45659	46061
44123	44531	44879	45289	45667	46073
44129	44533	44887	45293	45673	46091
44131	44537	44893		45677	46093

46099	46489	46831	47287	47629	47977
46103	46499	46853	47293	47639	47981
46133	46507	46861	47297	47653	48017
46141	46511	46867	47303	47657	48023
46147	46523	46877	47309	47659	48029
46153	46549	46889	47317	47681	48049
46171	46559	46901	47339	47699	48073
46181	46567	46919	47351	47701	48079
46183	46573	46933	47353	47711	48091
46187	46589	46957	47363	47713	48109
46199	46591	46993	47381	47717	48119
46219	46601	46997	47387	47737	48121
46229	46619	47017	47389	47741	48131
46237	46633	47041	47407	47743	48157
46261	46639	47051	47417	47777	48163
46271	46643	47057	47419	47779	48179
46273	46649	47059	47431	47791	48187
46279	46663	47087	47441	47797	48193
46301	46679	47093	47459	47807	48197
46307	46681	47111	47491	47809	48221
46309	46687	47119	47497	47819	48239
46327	46691	47123	47501	47837	48247
46337	46703	47129	47507	47843	48259
46349	46723	47137	47513	47857	48271
46351	46727	47143	47521	47869	48281
46381	46747	47147	47527	47881	48299
46399	46751	47149	47533	47903	48311
46411	46757	47161	47543	47911	48313
46439	46769	47189	47563	47917	48337
46441	46771	47207	47569	47933	48341
46447	46807	47221	47581	47939	48353
46451	46811	47237	47591	47947	48371
46457	46817	47251	47599	47951	48383
46471	46819	47269	47609	47963	48397
46477	46829	47279	47623	47969	

48407	48767	49117	49463	49823	50159
48409	48779	49121	49477	49831	50177
48413	48781	49123	49481	49843	—
48437	48787	49139	49499	49853	50207
48449	48799	49157	—	49871	50221
48463	—	49169	49523	49877	50227
48473	48809	49171	49529	49891	50231
48479	48817	49177	49531	—	50261
48481	48821	49193	49537	49919	50263
48487	48823	49199	49547	49921	50273
48491	48847	—	49549	49927	50287
48497	48857	49201	49559	49937	50291
—	48859	49207	49597	49939	—
48523	48869	49211	—	49943	50311
48527	48871	49223	49603	49957	50321
48533	48883	49253	49613	49991	50329
48539	48889	49261	49627	49993	50333
48541	—	49277	49633	49999	50341
48563	48907	49279	49639	—	50359
48571	48947	49297	49663	50021	50363
48589	48953	—	49667	50023	50377
48593	48973	49307	49669	50033	50383
—	48989	49331	49681	50047	50387
48611	48991	49333	49697	50051	—
48619	—	49339	—	50053	50411
48623	49003	49363	49711	50069	50417
48647	49009	49367	49727	50077	50423
48649	49019	49369	49739	50087	50441
48661	49031	49391	49741	50093	50459
48673	49033	49393	49747	—	50461
48677	49037	—	49757	50101	50497
48679	49043	49409	49783	50111	—
—	49057	49411	49787	50119	50503
48731	49069	49417	49789	50123	50513
48733	49081	49429	—	50129	50527
48751	—	49433	49801	50131	50539
48757	49103	49451	49807	50147	50543
48761	49109	49459	49811	50153	50549

50551	50971	51349	51679	52051	52453
50581	50989	51361	51683	52057	52457
50587	50993	51383	51691	52067	52489
50591	—	—	—	52069	—
50593	51001	51407	51713	52081	52501
50599	51031	51413	51719	—	52511
—	51043	51419	51721	52103	52517
50627	51047	51421	51749	52121	52529
50647	51059	51427	51767	52127	52541
50651	51061	51431	51769	52147	52543
50671	51071	51437	51787	52153	52553
50683	—	51439	51797	52163	52561
—	51109	51449	—	52177	52567
50707	51131	51461	51803	52181	52571
50723	51133	51473	51817	52183	52579
50741	51137	51479	51827	52189	52583
50753	51151	51489	51829	—	—
50767	51157	51487	51839	52201	52609
50773	51169	—	51853	52223	52627
50777	51193	51503	51859	52237	52631
50789	51197	51511	51869	52249	52639
—	51199	51517	51871	52253	52667
50821	—	51521	51893	52259	52673
50833	51203	51539	51899	52267	52691
50839	51217	51551	—	52289	52697
50849	51229	51563	51907	52291	—
50857	51239	51577	51913	—	52709
50867	51241	51581	51929	52301	52711
50873	51257	51593	51941	52313	52721
50891	51263	51599	51949	52321	52727
50893	51283	—	51971	52361	52733
—	51287	51607	51973	52363	52747
50909	—	51613	51977	52369	52757
50923	51307	51631	51991	52379	52769
50929	51329	51637	—	52387	52783
50951	51341	51647	52009	52391	—
50957	51343	51659	52021	—	52807
50969	51347	51673	52027	52433	52813

52817	53173	53593	53923	54347	54667
52837	53189	53597	53927	54361	54673
52859	53197	—	53939	54367	54679
52861	—	53609	53951	54371	—
52879	53201	53611	53959	54377	54709
52883	53231	53617	53987	—	54713
52889	53233	53623	53993	54401	54721
—	53239	53629	—	54403	54727
52901	53267	53633	54001	54409	54751
52903	53269	53639	54011	54413	54767
52919	53279	53653	54013	54419	54773
52937	53281	53657	54037	54421	54779
52951	53299	53681	54049	54437	54787
52957	—	53693	54059	54443	54799
52963	53309	53699	54083	54449	—
52967	53323	—	54091	54469	54829
52973	53327	53717	—	54493	54833
52981	53353	53719	54101	54497	54851
52999	53359	53731	54121	54499	54869
—	53377	53759	54133	—	54877
53003	53381	53773	54139	54503	54881
53017	—	53777	54151	54517	—
53047	53401	53783	54163	54521	54907
53051	53407	53791	54167	54539	54917
53069	53411	—	54181	54541	54919
53077	53419	53813	54193	54547	54941
53087	53437	53819	—	54559	54949
53089	53441	53831	54217	54563	54959
53093	53453	53849	54251	54577	54973
—	53479	53857	54269	54581	54979
53101	—	53861	54277	54583	54983
53113	53503	53881	54287	—	—
53117	53507	53887	54293	54601	55001
53129	53527	53891	—	54617	55009
53147	53549	53897	54311	54623	55021
53149	53551	53899	54319	54629	55049
53161	53569	—	54323	54631	55051
53171	53591	53917	54331	54647	55057

55061	55487	55823	56197	56533	56897
55073	—	55829	—	56543	—
55079	55501	55837	56207	56569	56909
—	55511	55843	56209	56591	56911
55103	55529	55849	56237	56597	56921
55109	55541	55871	56239	56599	56923
55117	55547	55889	56249	—	56929
55127	55579	55897	56263	56611	56941
55147	55589	—	56267	56629	56951
55163	—	55901	56269	56633	56957
55171	55603	55903	56299	56659	56963
—	55609	55921	—	56663	56983
55201	55619	55927	56311	56671	56989
55207	55621	55931	56333	56681	56993
55213	55631	55933	56359	56687	56999
55217	55633	55949	56369	—	—
55219	55639	55967	56377	56701	57037
55229	55661	55987	56383	56711	57041
55243	55663	55997	56393	56713	57047
55249	55667	—	—	56731	57059
55259	55673	56003	56401	56737	57073
55291	55681	56009	56417	56747	57077
—	55691	56039	56431	56767	57089
55313	55697	56041	56437	56773	57097
55331	—	56053	56443	56779	—
55333	55711	56081	56453	56783	57107
55337	55717	56087	56467	—	57119
55339	55721	56093	56473	56807	57131
55343	55733	56099	56477	56809	57139
55351	55763	—	56479	56813	57143
55373	55787	56101	56489	56821	57149
55381	55793	56113	—	56827	57163
55399	55799	56123	56501	56843	57173
—	—	56131	56503	56857	57179
55411	55807	56149	56509	56873	57191
55439	55813	56167	56519	56891	57193
55441	55817	56171	56527	56893	—
55457	55819	56179	56531		57203
55469					

57221	57637	57977	58337	58711	59093
57223	57641	57991	58363	58727	—
57241	57649	—	58367	58733	59107
57251	57653	58013	58369	58741	59113
57259	57667	58027	58379	58757	59119
57269	57679	58031	58391	58763	59123
57271	57689	58043	58393	58771	59141
57283	57697	58049	—	58787	59149
57287	—	58057	58403	58789	59159
—	57709	58061	58411	—	59167
57301	57713	58067	58417	58831	59183
57329	57719	58073	58427	58889	59197
57331	57727	58099	58439	58897	—
57347	57731	—	58441	—	59207
57349	57737	58109	58451	58901	59209
57367	57751	58111	58453	58907	59219
57373	57773	58129	58477	58909	59221
57383	57781	58147	58481	58913	59233
57389	57787	58151	—	58921	59239
57397	57791	58153	58511	58937	59243
—	57793	58169	58537	58943	59263
57413	—	58171	58543	58963	59273
57427	57803	58189	58549	58967	59281
57457	57809	58193	58567	58979	—
57467	57829	58199	58573	58991	59333
57487	57839	—	58579	58997	59341
57493	57847	58207	—	—	59351
—	57853	58211	58601	59009	59357
57503	57859	58217	58603	59011	59359
57527	57881	58229	58613	59021	59369
57529	57899	58231	58631	59023	59377
57557	—	58237	58657	59029	59387
57559	57901	58243	58661	59051	59393
57571	57917	58271	58679	59053	59399
57587	57923	—	58687	59063	—
57593	57943	58309	58693	59069	59407
—	57947	58313	58699	59077	59417
57601	57973	58321	—	59083	59419

59441	59791	60217	60637	61001	61441
59443	59797	60223	60647	61007	61463
59447	—	60251	60649	61027	61469
59453	59809	60257	60659	61031	61471
59467	59833	60259	60661	61043	61483
59471	59863	60271	60679	61051	61487
59473	59879	60289	60689	61057	61493
59497	59887	60293	—	61091	—
—	—	—	60703	61099	61507
59509	59921	60317	60719	—	61511
59513	59929	60331	60727	61121	61519
59539	59951	60337	60733	61129	61543
59557	59957	60343	60737	61141	61547
59561	59971	60353	60757	61151	61553
59567	59981	60373	60761	61153	61559
59581	59999	60383	60763	61169	61561
—	—	60397	60773	—	61583
59611	60013	—	60779	61211	—
59617	60017	60413	60793	61223	61603
59621	60029	60427	—	61231	61609
59627	60037	60443	60811	61253	61613
59629	60041	60449	60821	61261	61627
59651	60077	60457	60859	61283	61631
59659	60083	60493	60869	61291	61637
59663	60089	60497	60887	61297	61643
59669	60091	—	60889	—	61651
59671	—	60509	60899	61331	61657
59693	60101	60521	—	61333	61667
59699	60103	60527	60901	61339	61673
—	60107	60539	60913	61343	61681
59707	60127	60589	60917	61357	61687
59723	60133	—	60919	61363	—
59729	60139	60601	60923	61379	61703
59743	60149	60607	60937	61381	61717
59747	60161	60611	60943	—	61723
59753	60167	60617	60953	61403	61729
59771	60169	60623	60961	61409	61751
59779	—	60631	—	61417	61757
	60209				

61781
—
61813
61819
61837
61843
61861
61871
61879
—
61909
61927
61933
61949
61961
61967
61979
61981
61987
61991
—
62003
62011
62017
62039
62047
62053
62057
62071
62081
62099
—
62119
62129
62131
62137
62141
62143

62171
62189
62191
—
62201
62207
62213
62219
62233
62273
62297
62299
—
62303
62311
62323
62327
62347
62351
62383
—
62401
62417
62423
62459
62467
62473
62477
62483
62497
—
62501
62507
62533
62539
62549
62563
62581
62591

62597
—
62603
62617
62627
62633
62639
62653
62659
62683
62687
—
62701
62723
62731
62743
62753
62761
62773
62791
—
62801
62819
62827
62851
62861
62869
62873
62897
—
62903
62921
62927
62929
62939
62969
62971
62981
62983

62987
62989
—
63029
63031
63059
63067
63073
63079
63097
—
63103
63113
63127
63131
63149
63179
63197
63199
—
63211
63241
63247
63277
63281
63299
—
63311
63313
63317
63331
63337
63347
63353
63361
63367
63377
63389
63391

63397
—
63409
63419
63421
63439
63443
63463
63467
63473
63487
63493
63499
—
63521
63527
63533
63541
63559
63577
63587
63589
63599
—
63601
63607
63611
63617
63629
63647
63649
63659
63667
63671
63689
63691
63697
—
63703

63709
63719
63727
63737
63743
63761
63773
63781
63793
63799
—
63803
63809
63823
63839
63841
63853
63857
63863
—
63901
63907
63913
63929
63949
63977
63997
—
64007
64013
64019
64033
64037
64063
64067
64081
64091
—
64109

64123	64591	64997	65357	65701	66083
64151	—	—	65371	65707	66089
64153	64601	65003	65381	65713	—
64157	64609	65011	65393	65717	66103
64171	64613	65027	—	65719	66107
64187	64621	65029	65407	65729	66109
64189	64627	65033	65413	65731	66137
—	64633	65053	65419	65761	66161
64217	64661	65063	65423	65777	66169
64223	64663	65071	65437	65789	66173
64231	64667	65089	65447	—	66179
64237	64679	65099	65449	65809	66191
64271	64693	—	65479	65827	—
64279	—	65101	65497	65831	66221
64283	64709	65111	—	65837	66239
—	64717	65119	65519	65839	66271
64301	64747	65123	65521	65843	66293
64303	64763	65129	65537	65851	—
64319	64781	65141	65539	65867	66301
64327	64783	65147	65543	65881	66337
64333	64793	65167	65551	65899	66343
64373	—	65171	65557	—	66347
64381	64811	65173	65563	65921	66359
64399	64817	65179	65579	65927	66361
—	64849	65183	65581	65929	66373
64403	64853	—	65587	65951	66377
64433	64871	65203	65599	65957	66383
64439	64877	65213	—	65963	—
64451	64879	65239	65609	65981	66403
64453	64891	65257	65617	65983	66413
64483	—	65267	65629	65993	66431
64489	64901	65269	65633	—	66449
64499	64919	65287	65647	66029	66457
—	64921	65293	65651	66037	66463
64513	64927	—	65657	66041	66467
64553	64937	65309	65677	66047	66491
64567	64951	65323	65687	66067	66499
64577	64969	65327	65699	66071	—
64579		65353	—		66509

66523	66889	67231	67589	67957	68437
66529	—	67247	—	67961	68443
66533	66919	67261	67601	67967	68447
66541	66923	67271	67607	67979	68449
66553	66931	67273	67619	67987	68473
66569	66943	67289	67631	67993	68477
66571	66947	—	67651	—	68483
66587	66949	67307	67679	68023	68489
66593	66959	67339	67699	68041	68491
—	66973	67343	—	68053	—
66601	66977	67349	67709	68059	68501
66617	—	67369	67723	68071	68507
66629	67003	67391	67733	68087	68521
66643	67021	67399	67741	68099	68531
66653	67033	—	67751	—	68539
66683	67043	67409	67757	68111	68543
66697	67049	67411	67759	68113	68567
—	67057	67421	67763	68141	68581
66701	67061	67427	67777	68147	68597
66713	67073	67429	67783	68161	—
66721	67079	67433	67789	68171	68611
66733	—	67447	—	—	68633
66739	67103	67453	67801	68207	68639
66749	67121	67477	67807	68209	68659
66751	67129	67481	67819	68213	68669
66763	67139	67489	67829	68219	68683
66791	67141	67493	67843	68227	68687
66797	67153	67499	67853	68239	68699
—	67157	—	67867	68261	—
66809	67169	67511	67883	68279	68711
66821	67181	67523	67891	68281	68713
66841	67187	67531	—	—	68729
66851	67189	67537	67901	68311	68737
66853	—	67547	67927	68329	68743
66863	67211	67559	67931	68351	68749
66877	67213	67567	67933	68371	68767
66883	67217	67577	67939	68389	68771
	67219	67579	67943	68399	68777
				—	

68791	69197	69623	70039	70381	70783
—	—	69653	70051	70393	70793
68813	69203	69661	70061	—	—
68819	69221	69677	70067	70423	70823
68821	69233	69691	70079	70429	70841
68863	69239	69697	70099	70439	70843
68879	69247	—	—	70451	70849
68881	69257	69709	70111	70457	70853
68891	69259	69737	70117	70459	70867
68897	69263	69739	70121	70481	70877
68899	—	69761	70123	70487	70879
—	69313	69763	70139	70489	70891
68903	69317	69767	70141	—	—
68909	69337	69779	70157	70501	[illegible]
68917	69341	—	70163	70507	[illegible]
68927	69371	69809	70177	70529	[illegible]
68947	69379	69821	70181	70537	[illegible]
68963	69383	69827	70183	70549	70937
68993	69389	69829	70199	70571	70949
—	—	69833	—	70573	70951
69001	69401	69847	70201	70583	70957
69011	69403	69857	70207	70589	70969
69019	69427	69859	70223	—	70979
69029	69431	69877	70229	70607	70981
69031	69439	69899	70237	70619	70991
69061	69457	—	70241	70621	70997
69067	69463	69911	70249	70627	70999
69073	69467	69929	70271	70639	—
—	69473	69931	70289	70657	71011
69109	69481	69941	70297	70663	71023
69119	69491	69959	—	70667	71039
69127	69493	69991	70309	70687	71059
69143	69497	69997	70313	—	71069
69149	69499	—	70321	70709	71081
69151	—	70001	70327	70717	71089
69163	69539	70003	70351	70729	—
69191	69557	70009	70373	70753	71119
69193	69593	70019	70379	70769	71129
	—				

71143	71453	71861	72211	72617	72959
71147	71471	71867	72221	72623	72973
71153	71473	71879	72223	72643	72977
71161	71479	71881	72227	72647	72997
71167	71483	71887	72229	72649	—
71171	—	71899	72251	72661	73009
71191	71503	—	72253	72671	73013
—	71527	71909	72269	72673	73019
71209	71537	71917	72271	72679	73037
71233	71549	71933	72277	72689	73039
71237	71551	71941	72287	—	73043
71249	71563	71947	—	72701	73061
71257	71569	71963	72307	72707	73063
71261	71593	71971	72313	72719	73079
71263	71597	71983	72337	72727	73091
71287	—	71987	72341	72733	—
71293	71633	71993	72353	72739	73121
—	71647	71999	72367	72763	73127
71317	71663	—	72379	72767	73133
71327	71671	72019	72383	72797	73141
71329	71693	72031	—	—	73181
71333	71699	72043	72421	72817	73189
71339	—	72047	72431	72823	—
71341	71707	72053	72461	72859	73237
71347	71711	72073	72467	72869	73243
71353	71713	72077	72469	72871	73259
71359	71719	72089	72481	72883	73277
71363	71741	72091	72493	72889	73291
71387	71761	—	72497	72893	—
71389	71777	72101	—	—	73303
71399	71789	72103	72503	72901	73309
—	—	72109	72533	72907	73327
71411	71807	72139	72547	72911	73331
71413	71809	72161	72551	72923	73351
71419	71821	72167	72559	72931	73361
71429	71837	72169	72577	72937	73363
71437	71843	72173	—	72949	73369
71443	71849	—	72613	72953	73379

73387
—
73417
73421
73433
73453
73459
73471
73477
73483
—
73517
73523
73529
73547
73553
73561
73571
73583
73589
73597
—
73607
73609
73613
73637
73643
73651
73673
73679
73681
73693
73699
—
73709
73721
73727
73751

73757
73771
73783
—
73819
73823
73847
73849
73859
73867
73877
73883
73897
—
73907
73939
73943
73951
73961
73973
73999
—
74017
74021
74027
74047
74051
74071
74077
74093
74099
—
74101
74131
74143
74149
74159
74161

74167
74177
74189
74197
—
74201
74203
74209
74219
74231
74257
74279
74287
74293
74297
—
74311
74317
74323
74353
74357
74363
74377
74381
74383
—
74411
74413
74419
74441
74449
74453
74471
74489
—
74507
74509
74521

74527
74531
74551
74561
74567
74573
74587
74597
—
74609
74611
74623
74653
74687
74699
—
74707
74713
74717
74719
74729
74731
74747
74759
74761
74771
74779
74797
—
74821
74827
74831
74843
74857
74861
74869
74873
74887

74891
74897
—
74903
74923
74929
74933
74941
74959
—
75011
75013
75017
75029
75037
75041
75079
75083
—
75109
75133
75149
75161
75167
75169
75181
75193
—
75209
75211
75217
75223
75227
75239
75253
75269
75277
75289
—

75307
75323
75329
75337
75347
75353
75367
75377
75389
75391
—
75401
75403
75407
75431
75437
75479
—
75503
75511
75521
75527
75533
75539
75541
75553
75557
75571
75577
75583
—
75611
75617
75619
75629
75641
75653
75659

75679	76079	76481	76871	77263	77591
75683	76081	76487	76873	77267	—
75689	76091	76493	76883	77269	77611
—	76099	—	—	77279	77617
75703	—	76507	76907	77291	77621
75707	76103	76511	76913	—	77641
75709	76123	76519	76919	77317	77647
75721	76129	76537	76943	77323	77659
75731	76147	76541	76949	77339	77681
75743	76157	76543	76961	77347	77687
75767	76159	76561	76963	77351	77689
75773	76163	76579	76991	77359	77699
75781	—	76597	—	77369	—
75787	76207	—	77003	77377	77711
75793	76213	76603	77017	77383	77713
75797	76231	76607	77023	—	77719
—	76243	76631	77029	77417	77723
75821	76249	76649	77041	77419	77731
75833	76253	76651	77047	77431	77743
75853	76259	76667	77069	77447	77747
75869	76261	76673	77081	77471	77761
75883	76283	76679	77093	77477	77773
—	76289	76697	—	77479	77783
75913	—	—	77101	77489	77797
75931	76303	76717	77137	77491	—
75937	76333	76733	77141	—	77801
75941	76343	76753	77153	77509	77813
75967	76367	76757	77167	77513	77839
75979	76369	76771	77171	77521	77849
75983	76379	76777	77191	77527	77863
75989	76387	76781	—	77543	77867
75991	—	—	77201	77549	77893
75997	76403	76801	77213	77551	77899
—	76421	76819	77237	77557	—
76001	76423	76829	77239	77563	77929
76003	76441	76831	77243	77569	77933
76031	76463	76837	77249	77573	77951
76039	76471	76847	77261	77587	77969

77977	78367	78791	79193	79589	79939
77983	—	78797	—	—	79943
77999	78401	—	79201	79601	79967
—	78427	78803	79229	79609	79973
78007	78437	78809	79231	79613	79979
78017	78439	78823	79241	79621	79987
78031	78467	78839	79259	79627	79997
78041	78479	78853	79273	79631	79999
78049	78487	78857	79279	79633	—
78059	78497	78877	79283	79657	80021
78079	—	78887	—	79669	80039
—	78509	78889	79301	79687	80051
78101	78511	78893	79309	79691	80071
78121	78517	—	79319	79693	80077
78137	78539	78901	79333	79697	—
78139	78541	78919	79337	79699	80107
78157	78553	78929	79349	—	80111
78163	78569	78941	79357	79757	80141
78167	78571	78977	79367	79769	80147
78173	78577	78979	79379	79777	80149
78179	78583	78989	79393	—	80153
78191	78593	—	79397	79801	80167
78193	—	79031	79399	79811	80173
—	78607	79039	—	79813	80177
78203	78623	79043	79411	79817	80191
78229	78643	79063	79423	79823	—
78233	78649	79087	79427	79829	80207
78241	78653	—	79433	79841	80209
78259	78691	79103	79451	79843	80221
78277	78697	79111	79481	79847	80231
78283	—	79133	79493	79861	80233
—	78707	79139	—	79867	80239
78301	78713	79147	79531	79873	80251
78307	78721	79151	79537	79889	80263
78311	78737	79153	79549	—	80273
78317	78779	79159	79559	79901	80279
78341	78781	79181	79561	79903	80287
78347	78787	79187	79579	79907	

80309
80317
80329
80341
80347
80363
80369
80387
—
80407
80429
80447
80449
80471
80473
80489
80491
—
80513
80527
80537
80557
80567
80599
—
80603
80611
80621
80627
80629
80651
80657
80669
80671
80677
80681
80683
80687
—
80701
80713
80737
80747
80749
80761
80777
80779
80783
80789
—
80803
80809
80819
80831
80833
80849
80863
80897
—
80909
80911
80917
80923
80929
80933
80953
80963
80989
—
81001
81013
81017
81019
81023
81031
81041
81043
81047
81049
81071
81077
81083
81097
—
81101
81119
81131
81157
81163
81173
81181
81197
81199
—
81203
81223
81233
81239
81281
81283
81293
81299
—
81307
81331
81343
81349
81353
81359
81371
81373
—
81401
81409
81421
81439
81457
81463
—
81509
81517
81527
81533
81547
81551
81553
81559
81563
81569
—
81611
81619
81629
81637
81647
81649
81667
81671
81677
81689
—
81701
81703
81707
81727
81737
81749
81761
81769
81773
81799
—
81817
81839
81847
81853
81869
81883
81899
—
81901
81919
81929
81931
81937
81943
81953
81967
81971
81973
—
82003
82007
82009
82013
82021
82031
82037
82039
82051
82067
82073
—
82129
82139
82141
82153
82163
82171
82183
82189
82193
—
82207
82217
82219
82223
82231
82237
82241
82261
82267
82279
—
82301
82307
82339
82349
82351
82361
82373
82387
82393
—
82421
82457
82463
82469
82471
82483
82487
82493
82499
—
82507
82529
82531
82549
82559

82561	82981	83389	83773	84191	84523
82567	82997	83399	83777	84199	84533
82571	—	—	83791	—	84551
82591	83003	83401	—	84211	84559
—	83009	83407	83813	84221	84589
82601	83023	83417	83833	84223	—
82609	83047	83423	83843	84229	84629
82613	83059	83431	83857	84239	84631
82619	83063	83437	83869	84247	84649
82633	83071	83443	83873	84263	84653
82651	83077	83449	83891	84299	84659
82657	83089	83459	—	—	84673
82699	83093	83471	83903	84307	84691
—	—	83477	83911	84313	84697
82721	83101	83497	83921	84317	—
82723	83117	—	83933	84319	84701
82727	83137	83537	83939	84347	84713
82729	83177	83557	83969	84349	84719
82757	—	83561	83983	84377	84731
82759	83203	83563	83987	84389	84737
82763	83207	83579	—	84391	84751
82781	83219	83591	84011	—	84761
82787	83221	83597	84017	84401	84787
82793	83227	—	84047	84407	84793
82799	83231	83609	84053	84421	—
—	83233	83617	84059	84431	84809
82811	83243	83621	84061	84437	84811
82813	83257	83639	84067	84443	84827
82837	83267	83641	84089	84449	84857
82847	83269	83653	—	84457	84859
82883	83273	83663	84121	84463	84869
82889	83299	83689	84127	84467	84871
82891	—	—	84131	84481	—
—	83311	83701	84137	84499	84913
82903	83339	83717	84143	—	84919
82913	83341	83719	84163	84503	84947
82939	83357	83737	84179	84509	84961
82963	83383	83761	84181	84521	84967

84977	85361	85717	86171	86491	86939
84979	85363	85733	86179	—	86951
84991	85369	85751	86183	86501	86959
—	85381	85781	86197	86509	86969
85009	—	85793	—	86531	86981
85021	85411	—	86201	86533	86993
85027	85427	85817	86209	86539	—
85037	85429	85819	86239	86561	87011
85049	85439	85829	86243	86573	87013
85061	85447	85831	86249	86579	87037
85081	85451	85837	86257	86587	87041
85087	85453	85843	86263	86599	87049
85091	85469	85847	86269	—	87071
85093	85487	85853	86287	86627	87083
—	—	85889	86291	86629	—
85103	85513	—	86293	86677	87103
85109	85517	85903	86297	86689	87107
85121	85523	85909	—	86693	87119
85133	85531	85931	86311	—	87121
85147	85549	85933	86323	86711	87133
85159	85571	85991	86341	86719	87149
85193	85577	85999	86351	86729	87151
85199	85597	—	86353	86743	87179
—	—	86011	86357	86753	87181
85201	85601	86017	86369	86767	87187
85213	85607	86027	86371	86771	—
85223	85619	86029	86381	86783	87211
85229	85621	86069	86389	—	87221
85237	85627	86077	86399	86813	87223
85243	85639	86083	—	86837	87251
85247	85643	—	86413	86843	87253
85259	85661	86111	86423	86851	87257
85297	85667	86113	86441	86857	87277
—	85669	86117	86453	86861	87281
85303	85691	86131	86461	86869	87293
85313	—	86137	86467	—	87299
85331	85703	86143	86477	86923	—
85333	85711	86161		86927	87313
				86929	

87317	87679	88037	88591	88951	89317
87323	87683	88069	88607	88969	89329
87337	87691	88079	88609	88993	89363
87359	87697	88093	88643	88997	89371
87383	87701	88117	88651	89003	89381
87403	87719	88129	88657	89009	89387
87407	87721	88169	88661	89017	89393
87421	87739	88177	88663	89021	89399
87427	87743	88211	88667	89041	89413
87433	87751	88223	88681	89051	89417
87443	87767	88237	88721	89057	89431
87473	87793	88241	88729	89069	89443
87481	87797	88259	88741	89071	89449
87491	87803	88261	88747	89083	89459
87509	87811	88289	88771	89087	89477
87511	87833	88301	88789	89101	89491
87517	87853	88321	88793	89107	89501
87523	87869	88327	88799	89113	89513
87539	87877	88337	88801	89119	89519
87541	87881	88339	88807	89123	89521
87547	87887	88379	88811	89137	89527
87553	87911	88397	88813	89153	89533
87557	87917	88411	88817	89189	89561
87559	87931	88423	88819	89203	89563
87583	87943	88427	88843	89209	89567
87587	87959	88463	88853	89213	89591
87589	87961	88469	88861	89227	89597
87613	87973	88471	88867	89231	89599
87623	87977	88493	88873	89237	89603
87629	87991	88499	88883	89261	89611
87631	88001	88513	88897	89269	89627
87641	88003	88523	88903	89273	89633
87643	88007	88547	88919	89293	89653
87649	88019	88589	88937	89303	89657
87671					89659

89669

89669	90031	90407	90847	91253	91691
89671	90053	90437	90863	91283	—
89681	90059	90439	90887	91291	91703
89689	90067	90469	—	91297	91711
—	90071	90473	90901	—	91733
89753	90073	90481	90907	91303	91753
89759	90089	90499	90911	91309	91757
89767	—	—	90917	91331	91771
89779	90107	90511	90931	91367	91781
89783	90121	90523	90947	91369	—
89797	90127	90527	90971	91373	91801
—	90149	90529	90977	91381	91807
89809	90163	90533	90989	91387	91811
89819	90173	90547	90997	91393	91813
89821	90187	90583	—	91397	91823
89833	90191	90599	91009	—	91837
89839	90197	—	91019	91411	91841
89849	90199	90617	91033	91423	91867
89867	—	90619	91079	91433	91873
89891	90203	90631	91081	91453	—
89897	90217	90641	91097	91457	91909
89899	90227	90647	91099	91459	91921
—	90239	90659	—	91463	91939
89909	90247	90677	91121	91493	91943
89917	90263	90679	91127	91499	91951
89923	90271	90697	91129	—	91957
89939	90281	—	91139	91513	91961
89959	90289	90703	91141	91529	91967
89963	—	90709	91151	91541	91969
89977	90313	90731	91153	91571	91997
89983	90353	90749	91159	91573	—
89989	90359	90787	91163	91577	92003
—	90371	90793	91193	91583	92009
90001	90373	—	91199	91591	92033
90007	90379	90803	—	—	92041
90011	90397	90821	91229	91621	92051
90017	—	90823	91237	91631	92077
90019	90401	90833	91243	91639	92083
90023	90403	90841	91249	91673	—

92107

92107	92431	92791	93169	93529	93971
92111	92459	—	93179	93553	93979
92119	92461	92801	93187	93557	93983
92143	92467	92809	93199	93559	93997
92153	92479	92821	—	93563	—
92173	92489	92831	93229	93581	94007
92177	—	92849	93239	—	94009
92179	92503	92857	93241	93601	94033
92189	92507	92861	93251	93607	94049
—	92551	92863	93253	93629	94057
92203	92557	92867	93257	93637	94063
92219	92567	92893	93263	93683	94079
92221	92569	92899	93281	—	94099
92227	92581	—	93283	93701	—
92233	92593	92921	93287	93703	94109
92237	—	92927	—	93719	94111
92243	92623	92941	93307	93739	94117
92251	92627	92951	93319	93761	94121
92269	92639	92957	93323	93763	94151
92297	92641	92959	93329	93787	94153
—	92647	92987	93337	—	94169
92311	92657	92993	93371	93809	—
92317	92669	—	93377	93811	94201
92333	92671	93001	93383	93827	94207
92347	92681	93047	—	93851	94219
92353	92683	93053	93407	93871	94229
92357	92693	93059	93419	93887	94253
92363	92699	93077	93427	93889	94261
92369	—	93083	93463	93893	94273
92377	92707	93089	93479	—	94291
92381	92717	93097	93481	93901	—
92383	92723	—	93487	93911	94307
92387	92737	93103	93491	93913	94309
92399	92753	93113	93493	93923	94321
—	92761	93131	93497	93937	94327
92401	92767	93133	—	93941	94331
92413	92779	93139	93503	93949	94343
92419	92789	93151	93523	93967	94349

94351	94747	95107	95471	95857	96259
94379	94771	95111	95479	95869	96263
94397	94777	95131	95483	95873	96269
94399	94781	95143	—	95881	96281
—	94789	95153	95507	95891	96289
94421	94793	95177	95527	—	96293
94427	—	95189	95531	95911	—
94433	94811	95191	95539	95917	96323
94439	94819	—	95549	95923	96329
94441	94823	95203	95561	95929	96331
94447	94837	95213	95569	95947	96337
94463	94841	95219	95581	95957	96353
94477	94847	95231	95597	95959	96377
94483	94849	95233	—	95971	—
—	94873	95239	95603	95987	96401
94513	94889	95257	95617	95989	96419
94529	—	95261	95621	—	96431
94531	94903	95267	95929	96001	96443
94541	94907	95273	95633	96013	96451
94543	94933	95279	95651	96017	96457
94547	94949	95287	—	96043	96461
94559	94951	—	95701	96053	96469
94561	94961	95311	95707	96059	96479
94573	94993	95317	95713	96079	96487
94583	94999	95327	95717	96097	96493
94597	—	95339	95723	—	96497
—	95003	95369	95731	96137	—
94603	95009	95383	95737	96149	96517
94613	95021	95393	95747	96157	96527
94621	95027	—	95773	96167	96553
94649	95063	95401	95783	96179	96557
94651	95071	95413	95789	96181	96581
94687	95083	95419	95791	96199	96587
94693	95087	95429	—	—	96589
—	95089	95441	95801	96211	—
94709	95093	95443	95803	96221	96601
94723	—	95461	95813	96223	96643
94727	95101	95467	95819	96233	96661

96667

96667	97021	97463	97871	98323	98713
96671	97039	97499	97879	98327	98717
96697	97073	—	97883	98347	98729
—	97081	97501	—	98369	98731
96703	—	97511	97919	98377	98737
96731	97103	97523	97927	98387	98773
96737	97117	97547	97931	98389	98779
96739	97127	97549	97643	—	—
96749	97151	97553	97961	98407	98801
96757	97157	97561	97967	98411	98807
96763	97159	97571	97973	98419	98809
96769	97169	97577	97987	98429	98837
96779	97171	97579	—	98443	98849
96787	97177	97583	98009	98453	98867
96797	97187	—	98011	98459	98869
96799	—	97607	98017	98467	98873
—	97213	97609	98041	98473	98887
96821	97231	97613	98047	98479	98893
96823	97241	97649	98057	98491	98897
96827	97259	97651	98081	—	98899
96847	97283	97673	—	98507	—
96851	—	97687	98101	98519	98909
96857	97301	—	98123	98533	98911
96893	97303	97711	98129	98543	98927
—	97327	97729	98143	98561	98929
96907	97367	97771	98179	98563	98939
96911	97369	97777	—	98573	98947
96931	97373	97787	98207	98597	98953
96953	97379	97789	98213	—	98963
96959	97381	—	98221	98621	98981
96973	97387	97813	98227	98627	98993
96979	97397	97829	98251	98639	98999
96989	—	97841	98257	98641	—
96997	97423	87843	98269	98663	99013
—	97429	97847	98297	98669	99017
97001	97441	97849	98299	98689	99023
97003	97453	97859	—	—	99041
97007	97459	97861	98317	98711	99053
			98321		

99079

99079	99439	99817	100207	100559
99083	99469	99823	100213	100591
99089	99487	98299	100237	100609
99103	99497	99833	100267	100613
99109	99523	99839	100271	100621
99119	99527	99859	100279	100649
99131	99529	99871	100291	100669
99133	99551	99877	100297	100673
99137	69559	99881	100313	100693
99139	99563	99901	100333	100699
99149	99571	99907	100343	100703
99173	99577	99923	100357	100733
99181	99581	99929	100361	100741
99191	99607	99961	100363	100747
99223	99611	99971	100379	100769
99233	99623	99989	100391	100787
99241	99643	99991	100393	100799
99251	99661	100003	100403	100801
99257	99667	100019	100411	100811
99259	99679	100043	100417	100823
99277	99689	100049	100447	100829
99289	99707	100057	100459	100847
99317	99709	100069	100469	100853
99347	99713	100103	100483	100907
99349	99719	100109	100493	100913
99367	99721	100129	100501	100927
99371	99733	100151	100511	100931
99377	99761	100153	100517	100937
99391	99767	100169	100519	100943
99397	99787	100183	100523	100957
99401	99793	100189	100537	100981
99409	99809	100193	100547	100987
99431			100549	100999

